अध्याय - 4

Complex Numbers And Quadratic Equations
सम्मिश्र संख्याएँ एवं द्विघातीय समीकरण

Basic Concept (मूल सिद्धांत)

1. $i = \sqrt{-1}$; $i^2 = -1$; $i3 = -i$; $i4 = 1$ etc (इत्यादि)

2. For a complex number, $z = a + ib$
Where
a = real part of z, Written as Re(z)
b = imaginary part of z, Written as Im(z)
$z = a + ib$ एक सम्मिश्र संख्या है।
जहाँ,
a = सम्मिश्र संख्या z का वास्तविक भाग होता है और इसे Re(z) द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है।
b = सम्मिश्र संख्या z का काल्पनिक भाग होता है और इसे Im(z) द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है।

3. Conjugate of a Complex number $z = a + ib$ is defined as $\overline{z} = a - ib$
सम्मिश्र संख्या $\overline{z} = a - ib$ का संयुग्मी संख्या $\overline{z} = a - ib$ में परिभाषित किया जाता है।

4. Modulus of a Complex number $z = a + ib$ is defined as $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
सम्मिश्र संख्या $z = a + ib$ का मापांक $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ परिभाषित किया जाता है।

5. If $z_1 = a_1 + ib$ and $z_2 = a_2 + ib$, then $z_1 = z_2 \Longleftrightarrow a_1 = a_2$ and $b_1 = b_2$.
यदि $z_1 = a_1 + ib$ और $z_2 = a_2 + ib$ तब $z_1 = z_2 \Longleftrightarrow a_1 = a_2$ और $b_1 = b_2$.

6. $|z|^2 = z\overline{z}$

7. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$

8. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}, \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

9. The polar form of a complex number $z = a + ib$ is $r(\cos\theta + i\sin\theta)$, Where $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (Modulus of z) and $\cos\theta = \frac{x}{r}$, $\sin\theta = \frac{y}{r}$ (θ is called argument of z) The value of θ lies, $-\pi \le \theta \le \pi$ is called the principal argument of z
सम्मिश्र संख्या $z = x + iy$ का ध्रुवीय रूप $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ है, जहाँ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (z का मापांक) और $\cos\theta = \frac{x}{r}$, $\sin\theta = \frac{y}{r}$ (θ, z का कोणांक कहलाता है।) θ का मान, जिससे कि $-\pi \le \theta \le \pi$, z का प्रमुख कोणांक कहलाता है।

10. The multiplicative inverse of $z = a + ib$
$= \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}, \left(\text{i,e, } z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}\right)$
where $a \neq 0, b \neq 0$
$z = a + ib$ का गुणात्मक प्रतिलोम $= \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$,
यदि $\left(z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}\right)$ जहाँ $a \neq 0, b \neq 0$.

11. In a quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$, where $a, b, c \in R, a \neq 0$ then the Solution is $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
एक द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$, जहाँ $a, b, c \in R$, $a \neq 0$ के हल $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ के द्वारा प्राप्त होते है।

Multiple Choice Questions
(बहु विकल्पीय प्रश्न)

1. $i^{91} =$
a. -1 b. 1
c. i d. $-i$

2. $(5i)\left(\frac{-3}{5}i\right) =$
a. -3 b. $3i$
c. $-3i$ d. 3

3. $i^9 + i^{19} =$
a. 0 b. i
c. $-i$ d. 1

4. $i^{-39} =$
a. i b. $-i$
c. 1 d. -1

5. $i^{326} =$
a. i b. 1
c. $-i$ d. -1

6. $(i^{109} + i^{114} + i^{119} + i^{124}) =$
a. 0 b. i
c. $-2i$ d. 2

7. $3i^{34} + 5i^{27} - 2i^{38} + 5i^{41} =$
a. 1 b. -1

c. $-4i$ d. $10i$

8. $i^{124} =$

a. 1 b. –1

c. i d. $-i$

9. $\sqrt{-9} \times \sqrt{-25} =$

a. 15 b. –15

c. $15i$ d. $-15i$

10. For any positive integer n, $-(\sqrt{-1})^{4n+3} =$

$-(\sqrt{-1})^{4n+3} = ?$ जहाँ n धनात्मक पूर्णांक है।

a. 1 b. –1

c. i d. $-i$

11. $\sqrt{-16} \times \sqrt{64} =$

a. 32 b. –32

c. $-32i$ d. $32i$

12. Which of the following statements in Correct?

निम्न में कौन सा कथन सही है?

a. $(5 + 7i) > (3 + 4i)$

b. $(5 + 7i) < (3 + 4i)$

c. $(3 + 5i) > (4 + 3i)$

4. None of these(इनमें से कोई नहीं)

13. Which of the following statements is correct–?

निम्न में से कौन सा कथन सही है?

a. $(2 + 3i) > (2 - 3i)$

b. $(3 + 2i) > (-3 + 2i)$

c. $(5 + 4i) > (-5 - 4i)$

d. None of these(इनमें से कोई नहीं)

14. $3(7 - 7i) + i(7 + 7i) =$

a. $14 - 14i$ b. $21 + 21i$

c. $14 + 14i$ d. $21 - 21i$

15. $(1 - i) - (-1 + i6) =$

a. $2 - 7i$ b. $-2 - 7i$

c. $-2 + 7i$ d. $2 + 7i$

16. If a and b are integers then $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ is true only when

यदि a और b दोनों पूर्णांक हो तो $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ सत्य होगा जब

a. a and b both positives (a और b दोनो धनात्मक हो)

b. a and b both negatives (a और b दोनो ऋणात्मक हो)

c. a and b both zero (a और b दोनो शुन्य हो)

d. At least one of a and b non-negative (a और b में कम से कम एक ऋणात्मक न हो)

17. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)z =$

a. 1 b. –1

c. $-\frac{1}{2}$ d. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

18. $(1 - i)^4 =$

a. –4 b. 4

c. $4i$ d. $-4i$

19. If $a + ib = \sqrt{\frac{1+i}{1-i}}$ then the value of $(a^2 + b^2)$ is

यदि $a + ib = \sqrt{\frac{1+i}{1-i}}$ हो तो $(a^2 + b^2)$ का मान है:

a. 1 b. –1

c. 2 d. –2

20. The smallest +ve integer n for which $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = 1$ is

n, के किस न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक पर $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = 1$ है:

a. 2 b. 3

c. 4 d. 6

21. $2 - 3i$ lies in [($2 - 3i$) स्थित है]

a. Quadrant I (चतुर्थांश I)

b. Quadrant II (चतुर्थांश II)

c. Quadrant III (चतुर्थांश I)

d. Quadrant VI (चतुर्थांश VI)

22. $\frac{1+2i}{1-i}$ **lies in (स्थित है।)**

a. Quadrant I (चतुर्थांश I)

b. Quadrant II (चतुर्थांश II)

c. Quadrant III (चतुर्थांश I)

d. Quadrant VI (चतुर्थांश VI)

23. If (यदि) $x + iy = \frac{a+ib}{c+id}$ then (हो तो) $(x^2 + y^2) =$

a. $\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$

b. $\frac{a^2-b^2}{c^2+d^2}$

c. $\frac{a^2+b^2}{c^2-d^2}$

d. None of these (इनमें से कोई नहीं)

24. The Multiplicative Inverse of $4 - 3i$ is

$4 - 3i$ का गुणात्मक प्रतिलोम है:

a. $4+3i$

b. $\frac{4}{25}-\frac{3i}{25}$

c. $\frac{4}{25}+\frac{3}{25}i$

d. None of these (इनमें से कोई नहीं)

25. The Multiplicative Inverse of $-i$ is
$-i$ का गुणात्मक प्रतिलोम है:

a. -1

b. i

c. 1

d. None of these (इनमें से कोई नहीं)

26. $(1+i)^{-1}=$

a. $(2-i)$

b. $\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)$

c. $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)$

d. None of these (इनमें से कोई नहीं)

27. $(1-i)^{-3}=$

a. $\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i\right)$

b. $\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i\right)$

c. $\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i\right)$

d. None of these (इनमें से कोई नहीं)

28. $(1-2i)^{-2}=$

a. $\left(\frac{3}{25}-\frac{4}{25}i\right)$

b. $\left(-\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i\right)$

c. $\left(-\frac{3}{25}-\frac{4}{25}i\right)$

d. None of these (इनमें से कोई नहीं)

29. $(2-3i)(-3+4i)=$

a. $(6+17i)$

b. $(6-17i)$

c. $(-6+17i)$

d. None of these (इनमें से कोई नहीं)

30. $(30-5i)\div(-2+3i)=$

a. $\left(\frac{21}{13}-\frac{1}{13}i\right)$

b. $\left(-\frac{21}{13}+\frac{1}{13}i\right)$

c. $\left(\frac{21}{13}+\frac{1}{13}i\right)$

d. None of these (इनमें से कोई नहीं)

31. If (यदि) $2+3i=x+iy$ then (हो तो) $y=$

a. -2 b. -3

d. 3 d. 2

32. If (यदि) $\frac{2-\sqrt{-9}}{1-\sqrt{-4}}=x+iy$ then (हो तो)

a. $x=\frac{2}{5}, y=\frac{3}{5}$

b. $x=\frac{3}{5}, y=\frac{2}{5}$

c. $x=\frac{8}{5}, y=\frac{1}{5}$

d. None of these (इनमें से कोई नहीं)

33. $(1-\sqrt{-1})(1+\sqrt{-1})(5-\sqrt{-7})(5+\sqrt{-7})=$ a. $25+7i$

b. $32+5i$

c. $29-3i$

d. None of these (इनमें से कोई नहीं)

34. Conjugate of $-3+\sqrt{-1}$ is
$-3+\sqrt{-1}$ का संयुग्मी है:

a. $-3+i$ b. $-3-i$

c. $\frac{3}{2}+\frac{i}{2}$ d. $-\frac{3}{2}-\frac{i}{2}$

35. The Conjugate of i^3 is
i^3 का संयुग्मी है:

a. $-i$

b. i

c. $i^{1/3}$

d. None of these (इनमें से कोई नहीं)

36. The Modulus of i is
i का मापांक है:

a. -1 b. 1

c. $-i$ d. 0

37. The Modulus of $2+\sqrt{-3}$ is
$2+\sqrt{-3}$ का मापांक है:

a. 7 b. -7

c. $\sqrt{7}$ d. $\sqrt{-7}$

38. The Modulus of $(3i-1)^2=$

a. 2 b. 4

c. -10 d. 10

39. **If (यदि) $2 + (x + iy) = 3 - i$ then (है, तो)**

a. $x = 3, y = 1$

b. $x = 4, y = -1$

c. $x = 1, y = -1$

d. None of these (इनमें से कोई नहीं)

40. **If (यदि) $x + 4iy = ix + y + 3$ then (हो तो)**

a. $x = 4, y = 1$

b. $x = -3, y = -1$

c. $x = -2, y = 1$

d. None of these (इनमें से कोई नहीं)

41. **If (यदि) $(1 - i)x + (1 + i)y = 1 - 3i$ then (हो तो)**

a. $x = -2, y = 1$

b. $x = 2, y = -1$

c. $x = -2, y = 1$

d. None of these (इनमें से कोई नहीं)

42. $\frac{i}{1+i} =$

a. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

b. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

c. $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$

d. None of these (इनमें से कोई नहीं)

43. $(-i)(2i)\left(-\frac{1}{8}i\right)^3 =$

a. $-\frac{1}{256}$ b. $-\frac{i}{256}$

c. $\frac{1}{256}$ d. $\frac{i}{256}$

44. $\left(i^{37} \times \frac{1}{i^{67}}\right) =$

a. i b. $-i$

c. $2i$ d. -1

45. $i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} =$

a. $2i$ b. 0

c. $-2i$ d. 2

46. $1 + i^{10} + i^{100} - i^{1000} =$

a. i b. $-i$

c. 0 d. -1

47. **The argument of $-1 - i\sqrt{3}$ is**

$-1 - i\sqrt{3}$ का कोणांक है।

a. $\frac{2\pi}{3}$ b. $-\frac{2\pi}{3}$

c. $\frac{\pi}{3}$ d. $-\frac{\pi}{3}$

48. **The argument of $(-\sqrt{3} + i)$ is**

$(-\sqrt{3} + i)$ का कोणांक है।

a. $\frac{2\pi}{3}$ b. $-\frac{2\pi}{3}$

c. $\frac{5\pi}{3}$ d. $-\frac{5\pi}{3}$

49. **The polar form of -2 is**

-2 का ध्रुवीय रूप है।

a. $-2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

b. $2(\cos\pi + i\sin\pi)$

c. $2(\cos 2\pi + i\sin 2\pi)$

d. None of these (इनमें से कोई नहीं)

50. **The Polar form of $-3i$ is**

$-3i$ का ध्रुवीय रूप है:

a. $3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$

b. $3\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$

c. $-3\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$

d. None of these (इनमें से कोई नहीं)

51. **The Polar form of $(1 + i)$ is**

$(1 + i)$, का ध्रवीय रूप है:

a. $2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$

b. $2\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$

c. $\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$

d. None of these (इनमें से कोई नहीं)

52. **The Polar form of $(-1 - i)$ is**

$(-1 - i)$ का ध्रुवीय रूप है:

a. $\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

b. $\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$

c. $\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$

d. $\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$

53. **The Polar form of $(\sqrt{3} + i)$ is**

$(\sqrt{3} + i)$ का ध्रुवीय रूप है:

a. $2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$

b. $2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$

c. $2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$

d. None of these (इनमें से कोई नहीं)

54. The Polar form of *i* is

***i* का ध्रवीय रूप है:**

a. $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$

b. $\cos\pi+i\sin\pi$

c. $\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$

d. None of these (इनमें से कोई नहीं)

55. The Polar form of $(-1+i\sqrt{3})$ is

$(-1+i\sqrt{3})$ का ध्रुवीय रूप है:

a. $2(\cos\pi+i\sin\pi)$

b. $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

c. $2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

d. $2\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$

56. The Polar form of $(-1-\sqrt{3}\,i)$

$(-1-\sqrt{3}\,i)$ को ध्रुवीय रूप होगा।

a. $2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

b. $2\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$

c. $2\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$

d. None of these (इनमें से कोई नहीं)

57. The Polar form of (1 – *i*) is

(1 – *i*) का ध्रवीय रूप है:

a. $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

b. $\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

c. $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

d. None of these (इनमें से कोई नहीं)

58. The Polar form of $(\sin 30^\circ+i\cos 30^\circ)$ is

$(\sin 30^\circ+i\cos 30^\circ)$ का ध्रुवीय रूप है:

a. $(\cos60^\circ+i\sin60^\circ)$

b. $(\cos60^\circ-i\sin60^\circ)$

c. $(\cos150^\circ+i\sin150^\circ)$

d. None of these (इनमें से कोई नहीं)

59. $(\sin120^\circ-i\cos120^\circ)$ का ध्रुवीय रूप है।

The Polar form of $(\sin120^\circ-i\cos120^\circ)$

a. $(\cos60^\circ+i\sin60^\circ)$

b. $(\cos30^\circ+i\sin30^\circ)$

c. $(\cos150^\circ+i\sin150^\circ)$

d. None of these (इनमें से कोई नहीं)

60. If (यदि) $z=(2+\sqrt{-5})$ then (हो तो) $|z|=$

a. 9

b. 7

c. 3

d. None of these(इनमें से कोई नहीं)

61. If (यदि) z = (3*i* – 1)^2 then (हो तो) $|z|=$

a. 8 b. 10

c. 4 d. $\sqrt{10}$

62. If (यदि) $z=(3+\sqrt{2}\,i)$ then (हो तो) $z\bar{z}=$

a. 5 b. 7

c. 11 d. $\sqrt{11}$

63. arg(1 + *i*) =

a. Л b. $\frac{\pi}{2}$

c. $\frac{\pi}{3}$ d. $\frac{\pi}{4}$

64. If z is a Complex number, then $z\bar{z}=$

यदि z एवं सम्मिश्र संख्या है, तो $z\bar{z}=$

a. $|z|$

b. $|z|^2$

c. $\sqrt{|z|}$

d. None of these (इनमें से कोई नहीं)

65. Square of a imaginary number is always.

काल्पनिक संख्या का वर्ग हमेशा।

a. Positive (धनात्मक)

b. Negative (ऋणात्मक)

c. Nothing can be said (कुछ नहीं कहा जा सकाता)

d. None of these (इनमें से कोई नहीं)

66. Modulus of Complex number z = x + *i*y will

सम्मिश्र संख्या z = x + *i*y का मापांक होगा।

a. $\sqrt{x^2+y^2}$ b. $\sqrt{x^2-y^2}$

c. $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ d. x^2+y^2

67. The Value of $i^4 + i^8 + i^{12} + i^{16}$ will be

$i^4 + i^8 + i^{12} + i^{16}$ का मान होगा

a. 2 b. 4

c. i d. $3i$

68. The modulus of $-1 - i\sqrt{3}$ Will be

$-1 - i\sqrt{3}$ का मापांक होगा।

a. 2 b. –2

c. 3 d. 6

69. If 4x + i(3x – y) = 3 + i(–6) then the value of x and y are

यदि 4x + i(3x – y) = 3 + i(–6) हो तो x और y का मान होगा।

a. $-\frac{3}{4}, \frac{30}{4}$

b. $\frac{3}{4}, \frac{33}{4}$

c. $\frac{33}{4}, \frac{44}{3}$

d. None of these (इनमें से कोई नहीं)

70. Conjugate of $\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i}$ will be

$\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i}$ का संयुग्मी होगा।

a. $\frac{1}{8}(\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i)$ b. $\frac{1}{4}(\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i)$

c. $\frac{1}{4}(\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i)$ d. $\frac{1}{8}(\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i)$

Very Short Answer Type Questions
(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

1. Find the value of i^{-130}.
i^{-130} का मान निकालें।

2. Express $(-i)(2i)\left(-\frac{1}{8}i\right)^3$ in the form of a + ib.
$(-i)(2i)\left(-\frac{1}{8}i\right)^3$ को a + ib के रूप में व्यक्त करे।

3. Express $(1 + 2i)^3$ in the form of a + ib
$(1 + 2i)^3$ को a + ib के रूप में व्यक्त करे।

4. Find the multiplicative inverse of 2 – 3i
2 – 3i का गुणात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

5. Find the Conjugate of $\frac{5 + \sqrt{2}\,i}{1 - \sqrt{2}\,i}$
$\frac{5 + \sqrt{2}\,i}{1 - \sqrt{2}\,i}$ का संयुग्मी ज्ञात करे।

6. If $(1+i)y^2 + (6+i) = (2+i)x$ then find the value of x and y.
यदि $(1+i)y^2 + (6+i) = (2+i)x$ हो तो x और y का मान ज्ञात करे।

7. Find the modulus and amplitude of z = 1 + $i\sqrt{3}$
z = 1 + $i\sqrt{3}$ का मापांक और कोणांक ज्ञात कीजिए।

8. Express z = 0 + 1i in the Polar Form.
z = 0 + 1i को ध्रुवीय रूप रूपांतरित कीजिए।

9. Express –3 in the Polar form.
–3 का ध्रुवीय रूप में रूपांतरित कीजिए।

10. Evaluate (मान निकालें) $4\sqrt{-4} + 5\sqrt{-9} - 3\sqrt{-16}$

Short Answer Type Questions
(लघु उत्तरीय प्रश्न)

1. Find the modulus of $\left(\frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i}\right)$
$\left(\frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i}\right)$ का मापांक ज्ञात करे।

2. If $\sqrt{\frac{1+i}{1-i}} = a + ib$ then show that $a^2 + b^2 = 1$
यदि $\sqrt{\frac{1+i}{1-i}} = a + ib$ हो तो दिखाऐ कि $a^2 + b^2 = 1$

3. If $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^m = 1$ then find the least positive integral value of m.
यदि $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^m = 1$ तो m का न्यूनतम पूर्णांक मान ज्ञात कीजिए।

4. Convert the Complex number $\frac{-16}{1 + i\sqrt{3}}$ to the Polar form.
सम्मिश्र $\frac{-16}{1 + i\sqrt{3}}$ को ध्रुवीय रूप में रूपांतरित कीजिए।

5. Find the real value of θ for which $\left(\frac{3 + 2i\text{Sin}\theta}{1 - 2i\text{Sin}\theta}\right)$ is purely real.
θ के किस वास्तविक मान में $\left(\frac{3 + 2i\text{Sin}\theta}{1 - 2i\text{Sin}\theta}\right)$ का मान वास्तविक होगा।

Long Answer Type Questions
(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

1. Find the real numbers x and y if (x – iy)(3 + 5i) is the Conjugate of –6 –24i.
यदि (x – iy)(3 + 5i), –6 –24i की संयुग्मी है तो वास्तविक संख्याएँ x और y ज्ञात कीजिए।

2. If $(x + iy)^{\frac{1}{3}} = (a + ib)$ then prove that $\frac{x}{y} + \frac{y}{b} = 4(a^2 - b^2)$

यदि $(x+iy)^{\frac{1}{3}}=(a+ib)$ हो तो सिद्ध करें कि $\frac{x}{y}+\frac{y}{b}=4(a^2-b^2)$

3. If $\left|\frac{z-5i}{z+5i}\right|=1$, show that z is a real Number.

यदि $\left|\frac{z-5i}{z+5i}\right|=1$ तो दिखाइए कि z एक वास्तविक संख्या है।

Answer key उत्तरमाला

Objective Questions (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

1.d	2.d	3.a	4.a	5.d	6.a	7.b	8.a
9.b	10.c	11d	12.d	13.d	14.a	15.a	16.d
17.b	18.a	19.a	20.c	21.d	22.b	23.a	24.c
25.b	26.c	27.b	28.b	29.a	30.b	31.c	32.c
33.d	34.b	35.a	36.b	37.c	38.d	39.c	40.a
41.b	42.b	43.d	44.d	45.b	46.c	47.b	48.c
49.b	50.a	51.c	52.b	53.b	54.a	55.c	56.b
57.b	58.a	59.b	60.c	61.b	62.c	63.d	64.b
65.b	66.a	67.b	68.a	69.b	70.c		

Very Short Answer Type Questions (अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

1. We have

$$i^{-130}=\frac{1}{i^{130}}=\frac{1}{i^{130}}\times\frac{i^2}{i^2}$$

$$=\frac{i^2}{i^{132}}=\frac{i^2}{(i^4)^{33}}=\frac{-1}{(1)^{33}}=-1 \qquad \left[\begin{array}{l}\therefore i^2=-1\\ i^4=1\end{array}\right]$$

2. We have

$$(-i)(2i)\left(-\frac{1}{8}i\right)^3=(-2i^2)\left(-\frac{1}{512}\right)i^3$$

$$=\frac{2}{512}i^5$$

The given complex no. is express as

$$=\frac{1}{256}(i^4)i=\frac{i}{256}$$

$$\therefore z=0+\frac{1}{256}i$$

3. $(1+2i)^3=(1)^3+3(1)^2.(2i)+3.1.(2i)^2+(2i)^3$

$=1+6i+12i^2+8i^3$

$=1+6i-12-8i$

$=-11-2i$

4. Let (माना) $z=2-3i$,

then (तब) $\bar{z}=2+3i$

$\therefore$ Multiplicative inverse of z (z का गुणात्मक प्रतिलोम)

$$\therefore z^{-1}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}=\frac{2+3i}{4+9}=\frac{2+3i}{13}=\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i.$$

5. Let, $z=\frac{5+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i}=\frac{5+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i}\times\frac{1+\sqrt{2}i}{1+\sqrt{2}i}$

$$=\frac{5+5\sqrt{2}i+\sqrt{2}i+2i^2}{1-2i^2}$$

$$=\frac{5+6\sqrt{2}i-2}{1+2}$$

$$=\frac{3+6\sqrt{2}i}{3}=1+2\sqrt{2}i$$

$\therefore$ Conjugate of $\bar{z}=\overline{1+2\sqrt{2}i}=1-2\sqrt{2}i$

6. Given that (दिया हुआ है)

$(1+i)y^2+(6+i)=(2+i)x$

$\Rightarrow(y^2+6)+(y^2+1)i=2x+xi$

Equating real and imaginary parts, We get

$\Rightarrow y^2+6=2x \quad \Rightarrow y^2-2x=-6$ .... (I)

and $y^2+1=x \quad \Rightarrow y^2-x=-1$ ....(II)

Solving equation I and II we, get

समीकरण I और II को हल करने पर

$x=5, y=\pm 2$

7. Given that (दिया है)

$z=1+i\sqrt{3}$

$|z|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$

$|z|=2$

Suppose that (माना कि)

$z=(1+\sqrt{3}i)=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$\Rightarrow r\cos\theta=1$ & $r\sin\theta=\sqrt{3}$

$\therefore \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}=\frac{\sqrt{3}}{1}$

$\Rightarrow \tan\theta=\sqrt{3}$

$\tan\theta=\tan\frac{\pi}{3}$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{3}$

$\therefore \text{amp}(z)=\frac{\pi}{3}$

8. $z=0+1.i$

Let (माना) $z=(0+1.i)=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

Then (तब)

$r\cos\theta=0$ and $r\sin\theta=1$

On the squaring and adding both side ,we get

(दोनों तरफ वर्ग कर जोड़ने पर प्राप्त होता है।)

$r^2 = 1^2 \Rightarrow r = 1 : (r = |z|)$

So that, $\cos\theta = 0$ and $\sin\theta = 1$

and (और)

$\therefore \theta = \frac{\pi}{2}$

Hence, Polar form of (अतः ध्रुवीय रूप)

$z = 0 + 1.i = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

9. $z = -3 + 0.i$

Let $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = (-3 + 0.i)$

then (तब)

$r\cos\theta = -3$ and (और) $r\sin\theta = 0$

दोनों तरफ वर्ग कर जोड़ने पर प्राप्त होता है (Both side Squaring and adding, we get)

$r^2 = 9 \Rightarrow r = 3$

So that, $3\cos\theta = -3 \Rightarrow \cos\theta = -1$

and $3\sin\theta = 0 \Rightarrow \sin\theta = 0$

$\therefore \theta = \pi$

The Polar of $z = -3 + 0i = 3(\cos\pi + i\sin\pi)$

(Z का ध्रुवीय रूप)

10. We have

$$4\sqrt{-4} + 5\sqrt{-9} - 3\sqrt{-16} = 4\sqrt{4i^2} + 5\sqrt{9i^2} - 3\sqrt{16i^2}$$

$$= 4.2i + 5.3i - 3.4i$$

$$= 8i + 15i - 12i$$

$$= 23i - 12i = 11i$$

Short Answer Type Questions
(लघु उत्तरीय प्रश्न)

1. Let (माना)

$$z = \left(\frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i}\right)$$

$$= \frac{(1+i)^2 - (1-i)^2}{(1-i)(1+i)}$$

$$= \frac{(1+i+1-i)(1+i-1+i)}{1-i^2}$$

$$= \frac{2.2i}{1+1} = \frac{2.2i}{2} = 2i$$

Modulus of $z = |z| = \sqrt{2^2} = 2$

2. Given that (दिया हुआ है)

$$a + ib = \sqrt{\frac{1+i}{1-i}}$$

$$\Rightarrow a + ib = \sqrt{\frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i}} = \sqrt{\frac{(1+i)^2}{1-i^2}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow a + ib = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow |a + ib| = \frac{1}{\sqrt{2}}|1 + i|$$ [Taking mod both side] [दोनों तरफ मोड लगाने पर]

$$\Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+1}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 1$$

$\Rightarrow a^2 + b^2 = 1$ Proved

3. Given that (दिया हुआ है)

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^m = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i}\right)^m = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}\right)^m = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1+2i-1}{2}\right)^m = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2i}{2}\right)^m = 1$$

$i^m = 1 = i^4$

$\therefore m = 4$

$\therefore$ Least value of $m = 4$

(m का न्यूनतम मान = 4)

4. Given that (दिया हुआ है)

$$\frac{-16}{1+i\sqrt{3}} = \frac{-16(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}$$

$$= \frac{16(1-i\sqrt{3})}{1-3i^2}$$

$$= \frac{-16(1-i\sqrt{3})}{4}$$

$$\therefore \frac{-16}{1+i\sqrt{3}} = -4 + 4\sqrt{3}\,i$$

Let (माना)

$z = -4 + 4\sqrt{3}\,i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\therefore r\cos\theta = -4$ and(और) $r\sin\theta = 4\sqrt{3}$

Squaring both side and adding, we, get

दोनों ओर वर्ग करके जोड़ने पर हमें प्राप्त होता है

$r^2 = 16 + 48 = 64$

$\therefore r = 8$

$\therefore \cos\theta = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$ and (और) $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$\therefore$ The Polar form of

$$= -\frac{16}{1+i\sqrt{3}} = 8\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

5. We have

We have,

$$\frac{3+2i\sin\theta}{(1-2i\sin\theta)} = \frac{(3+2i\sin\theta)}{(1-2i\sin\theta)} \times \frac{(1+2i\sin\theta)}{(1+2i\sin\theta)}$$

$$= \frac{3+6i\sin\theta+2i\sin\theta+4i^2\sin^2\theta}{1-4i^2\sin^2\theta}$$

$$= \frac{3+8i\sin\theta-4\sin^2\theta}{1+4\sin^2\theta}$$

$$= \frac{3-4\sin^2\theta}{1+4\sin^2\theta} + \frac{i8\sin\theta}{1+4\sin^2\theta}$$

Now, it being real, we have

यह वास्तविक होगा, जब

$$\frac{8\sin\theta}{1+4\sin^2\theta} = 0$$

$$\Leftrightarrow 8\sin\theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \theta = n\pi, n\epsilon Z$$

Long Answer Type Questions
(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

1. Let (माना),

$$z = (x - iy)(3 + 5i)$$

$$= 3x + 5xi - 3yi - 5yi^2$$

$$= (3x + 5y) + (5x - 3y)i$$

$\therefore$ Conjugate (संयुग्मी)

$$\bar{z} = (3x + 5y) - (5x - 3y)i$$

Also (फिर)

$$\bar{z} = -6 - 24i$$

$$\therefore (3x + 5y) - (5x - 3y)i = -6 - 24i$$

On Equating real and imaginary parts, we have

वास्तविक एवं काल्पनिक भाग को बराबर करने पर

$3x + 5y = -6$ (i)

$5x - 3y = 24$ (ii)

Performing (i) × 3 + (ii) × 5, We get

$9x + 15y + 25x - 15y = -18 + 120$

$\Rightarrow 34x = 102$

$$x = \frac{102}{34} = 3$$

Putting the value of x in equation (i), we get

समीकरण (i) में x का मान रखने पर

$3 \times 3 + 5y = -6$

$5y = -6 - 9 = -15$

$$y = -\frac{15}{5} = -3$$

$\therefore x = 3$ and $y = -3$

2. Given (दिया है)

$$(x + iy)^{\frac{1}{3}} = a + ib$$

$$\Rightarrow x + iy = (a + ib)^3$$

$$\Rightarrow x + iy = a^3 + 3a^2bi + 3ab^2i^2 + i^3b^3$$

$$\Rightarrow x + iy = a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - ib^3$$

$$\Rightarrow x + iy = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i$$

On equating real and imaginary part, we get

वास्तविक एवं काल्पनिक भाग को बराबर करने पर

$x = a^3 - 3ab^2$ and(और) $y = 3a^2b - b^3$

$$\therefore \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{a^3 - 3ab^2}{a} + \frac{3a^2b - b^3}{b}$$

$$= \frac{a(a^2 - 3b^2)}{a} + \frac{b(3a^2 - b^2)}{b}$$

$$= a^2 - 3b^2 + 3a^2 - b^2$$

$$= 4a^2 - 4b^2$$

$$\therefore \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 4(a^2 - b^2)$$

3. Let (माना)

$z = (x + iy)$.

Now

$$\left|\frac{z - 5i}{z + 5i}\right| = 1$$

$$\Rightarrow \left|\frac{z - 5i}{z + 5i}\right| = 1 \qquad \left[\therefore \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}\right]$$

$$\Rightarrow |z - 5i| = |z + 5i|$$

$$\Rightarrow |x + iy - 5i| = |x + iy + 5i|$$

$$\Rightarrow |x + i(y - 5)|^2 = |x + i(y + 5)|^2$$

$$\Rightarrow x^2 + (y - 5)^2 = x^2 + (y + 5)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 10y + 25 = x^2 + y^2 + 10y + 25$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 10y + 25 - x^2 - y^2 - 10y - 25 = 0$$

$$\Rightarrow -20y = 0$$

$$\Rightarrow y = 0$$

Hence $z = x + iy = x$ is real number

अतः $z = x + iy = x$ वास्तविक संख्या है।