अध्याय - 8

Sequences And Series
अनुक्रम तथा श्रेणी

★ Sequence :- A succession of numbers $t_1, t_2, t_3, ... t_n$ formed according to some definite rule is called a sequence.

$t_1, t_2, t_3, ...t_n$ are respectively called the first, Second, Third, ... nth terms of the sequence.

A sequence is said to be finite or infinite according as the number of terms in it is finite or infinite respectively.

★ Series :- A series is the sum of the terms of a sequence $t_1, t_2, t_3, ...t_n$.

A series is said to be finite or infinite according as the number of terms in it is finite or infinite respectively.

★ Progression :- A sequence whose terms follow a certain rule is called a progression.

★ Geometric progression :-A sequence of non-zero numbers is said to be in G.P., if the ratio of each term, except the first one, by its preceding term is always the same.

We can say that, a sequence $t_1, t_2, t_3, ...t_n$ is called geometric progression (geometric sequence), if it follows the relation $\frac{t_k + 1}{t_k} = r$ (constant).

The constant ratio is called common ratio of the G.P. and is denoted by r.

In a G.P., we usually denote the first term by a, the nth term by t_n or a_n.

nth term is also called general term.

Thus, G.P. can be written as, a, ar, ar^2, ar^3 ..... ar^{n-1} and so on.

★ General term of a G.P. :- If a be the 1st term of a G.P. and its common ratio is r, then general term or nth term $t_n = ar^{n-1}$ or $l = ar^{n-1}$, where l is the last term.

mth term of finite G.P. from the End :- Let a be the 1st term and r the common ratio of a G.P. having n terms then, mth term from the end is (n – m + 1)th term from the begining.

Also, mth term from the end = $l\left(\frac{1}{r}\right)^{m-1}$,

where l is the last term of the finite G.P. ,

★ Sum of first n terms of a G.P. :- If a and r are the first term and common ratio of a G.P. respectively, then the sum of n terms of this G.P. is given by

$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$, when $r < 1$.

$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$, when $r > 1$.

★ Note :- When r = 1,

$S_n = a + a + a + ...$ to n terms = na.

★ Arithmetic mean :- when three quantities are in A.P., the middle quantity is said to be Arithmetic mean (A.M.) between the other two.

Thus, if a, A and b are in A.P., then A is the A.M. between a and b.

$\therefore \quad A - a = b - A.$

$\Rightarrow \quad A + A = a + b$

$\Rightarrow \quad 2A = a + b$

$\Rightarrow \quad \boxed{A = \frac{a+b}{2}}$

★ n Arithmetic Means :- Let $A_1, A_2, A_3, ...A_n$ be the n A.M.'s between a and b.

So, we can find the Arithmetic means as

$A_1 = a + d, \; A_2 = a+2d, A_3 = a + 3d,$

....., $A_n = a + nd$. Where $d = \frac{b-a}{n+1}$

★ Note :- Sum of n A.M.'s between two quantities is n times the single A.M. between them.

★ Geometric mean :- Geometric mean between a and b is $\sqrt{ab}$.

or, if a, b, c are in G.P., Then Geometric mean (G.M.) is $b^2 = ac$.

★ n Geometric Mean's :- Let $G_1, G_2, G_3, ... G_n$ be the n G.M.'s between a and b.

So, we can find the G.M.'s as

$G_1 = ar, \quad G_2 = ar^2, G_3 = ar^3,$

..... $G_n = ar^n$ Where $r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

★ Relation between A.M. and G.M. :- Let a and b be any two positive numbers. Let A be the arithmetic mean and G the geometric mean of a and b.

Then, $A \geq G$.

★ For solving problems on G.P., it is convenient to take

i) 3 numbers in G.P. as $\frac{a}{r}$, a, ar.

ii) 4 numbers in G.P. as $\frac{a}{r^3}$, $\frac{a}{r}$, ar, ar^3.

iii) 5 numbers in G.P. as $\frac{a}{r^2}$, $\frac{a}{r}$, a, ar, ar^2.

iv) a, ar, ar^2, ar^3,. ... when their product is not given.

स्मरणीय तथ्य
अनुक्रम और श्रेणी

★ **अनुक्रम** :– यदि संख्याएँ $t_1, t_2, t_3, ...t_n$ इस प्रकार हो कि एक निश्चित नियमानुसार n के प्रत्येक प्राकृत मान के संगत एक संख्या t_n प्राप्त हो, तो एक अनुक्रम मिलता है, जिसके पद उक्त पद संख्याएँ है। t_1 को अनुक्रम का प्रथम पद, t_2 को द्वितीय पद, ... t_n को अनुक्रम का n वाँ पद कहते हैं।

किसी अनुक्रम में यदि पदों की संख्या परिमित हो, तो उसे परिमित अनुक्रम तथा यदि पदों की संख्या अपरिमित हो, तो उसे अपरिमित अनुक्रम कहा जाता है।

★ **श्रेणी** :– अनुक्रम $t_1, t_2, t_3, ...$ के पदों को घनात्मक (+) चिह्न से युक्त करने पर प्राप्त व्यंजक $t_1 + t_2 + t_3 + ...t_n + ...$ को श्रेणी कहा जाता है।

★ यदि पदों की संख्या परिमित हो, तो श्रेणी को परिमित एवं पदों की संख्या अपरिमित हो तो श्रेणी को अपरिमित श्रेणी कहा जाता है।

★ **श्रेढ़ी (Progression) :-** यदि किसी अनुक्रम के पद एक निश्चित नियम का पालन करते हैं, तो वह अनुक्रम श्रेढ़ी कहलाता है।

★ **गुणोत्तर श्रेढ़ी (Geomeric Progression) :-** अशून्य संख्याओं वाला एक ऐसा अनुक्रम जिसमें किसी पद और उसके पूर्वगामी पद का अनुपात सदैव नियत रहे, गुणोत्तर श्रेढ़ी कहलाता है एवं गुणोत्तर श्रेढ़ी के पदों से बनी श्रेणी गुणोत्तर श्रेणी कहलाती है।

अतः $t_1, t_2, t_3, ...t_n$ से बना अनुक्रम गुणोत्तर श्रेढ़ी में कहलाता है, यदि यह संबंध $\frac{t_k+1}{t_k} = r$ (नियत) का पालन करता है।

यह अचर अनुपात सार्व अनुपात कहलाता है, इसे r द्वारा निरूपित किया जाता है।

किसी G.P. में प्रायः प्रथम पद को a से तथा n वाँ पद को t_n या a_n से निरूपित किया जाता है।

अतः यदि किसी G.P. का प्रथम पद a एवं सार्व अनुपात r है तो G.P. होगा :– a, ar, ar^2,....ar^{n-1}....., किसी G.P. के n वाँ पद को सामान्य पद या व्यापक पद भी कहा जाता है।

★ **किसी G.P. का n वाँ पद** :– यदि किसी G.P. का प्रथम पद a एवं सार्व अनुपात r हो, तो इसका n वाँ पद $t_n = ar^{n-1}$ या $l = ar^{n-1}$ जहाँ l= अंतिम पद।

★ **किसी G.P. का अंत से m वाँ पद** :– यदि किसी G.P. का प्रथम पद a तथा सार्व अनुपात r हो एवं पदों की संख्या n हो, तो अंत से m वाँ पद = प्रारंभ से (n–m+1) वाँ पद।

★ अंत से m वाँ पद $= l\left(\frac{1}{r}\right)^{m-1}$ जहाँ l = अंतिम पद, द्वारा भी ज्ञात किया जाता है।

★ **किसी G.P. के प्रथम n पदों का योग** :– यदि किसी G.P. का प्रथम पद a सार्व–अनुपात r है, G.P. के प्रथम n पदों का योग S_n हो, तो

$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$, जब $r < 1$.

$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$, जब $r > 1$.

$S_n = na$, जब $r = 1$.

Note :- जब $r = 1$, तो $S_n = a+a+a+.....$ n पदों तक = na,

★ समांतर माध्य :– यदि तीन संख्याएँ a, b, c, A.P. में हों, तो b को a और c का समांतर माध्य कहा जाता है।

★ यदि A, a और b के बीच एक समांतर माध्य है, तो

$A - a = b - A$

$\Rightarrow A + A = a + b.$

$\Rightarrow 2A = a + b$

$\therefore A = \frac{a+b}{2}$

★ n समांतर माध्य :– माना कि $A_1, A_2, A_3, ... A_n$ दो संख्याओं a और b के बीच n समांतर माध्य हैं, तो इन्हें हम निम्न तरह से ज्ञात कर सकते हैं :–

$d = \frac{b - a}{n+1}$

$\therefore \quad A_1 = a + d = a + \left(\frac{b-a}{n+1}\right)$

$A_2 = a + 2d = a + 2\left(\frac{b-a}{n+1}\right)$

$A_3 = a + 3d = a + 3\left(\frac{b-a}{n+1}\right)$

.....

.....

$A_n = a + nd = a + n\left(\frac{b-a}{n+1}\right)$

नोट :– दो संख्याओं के बीच n समांतर माध्यों का योगफल उन संख्याओं के बीच एक समांतर माध्य का n गुणा होता है।

★ गुणोत्तर माध्य :– दो संख्याओं a और b के बीच गुणोत्तर माध्य $\sqrt{ab}$ होता है।

यदि a, b, c, G.P. में है, तो b को a और c का गुणोत्तर माध्य (G.M) कहा जाता है तथा $b^2 = ac$ होता है।

★ n गुणोत्तर माध्य :– माना कि $G_1, G_2, G_3, \ldots\ldots G_n$ दो संख्याओं a और b के बीच n गुणोत्तर माध्य हैं, तो इन्हें हम निम्न तरीके से ज्ञात कर सकते हैं।

$r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

$\therefore \quad G_1 = ar = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

$G_2 = ar^2 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}}$

$G_3 = ar^3 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{n+1}}$

.....

.....

$G_n = ar^n = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}}$

★ A.M. एवं G.M. के बीच संबंध :– माना कि a और b दो दी गई धनात्मक संख्याएँ हैं तथा माना कि A और G इनके बीच के क्रमशः A.M. एवं G.M. हैं तो $A \geq G$.

★ G.P. में तीन क्रमागत संख्याएँ :– $\frac{a}{r}$ a, ar.

★ G.P. में चार क्रमागत संख्याएँ :– $\frac{a}{r^3}, \frac{a}{r}$, ar, ar^3.

★ G.P. में पाँच क्रमागत संख्याएँ :– $\frac{a}{r^2}, \frac{a}{r}$, a, ar, ar^2.

यदि संख्याओं का गुणनफल नहीं दिया हो, तो पदों को a, ar, ar^2, ar^3, ... के रूप में लिखना चाहिए।

★ दो राशियों a और b के बीच n गुणोत्तर माध्यों का गुणनफल

$= (ab)^{\frac{n}{2}}$.

Multiple Choice Questions
(बहु विकल्पीय प्रश्न)

1. For what values of x are the numbers $\frac{-2}{7}$, x, $\frac{-7}{2}$ in G.P.?

a. –1 and 1 b. –1 and 2
c. –2 and 1 d. –2 and 2

x के किस मान के लिए $\frac{-2}{7}$, x, $\frac{-7}{2}$ G.P. में है–

a. –1 और 1 b. – 1 और 2
c. –2 और 1 d. – 2 और 2

2. If k-1, 2k+1, 6k+3 are in G.P. ; then k =

a. 7 b. 4
c. –2 d. 0

यदि k-1, 2k+1, 6k+3 G.P., में है, तो k =

a. 7 b. 4
c. –2 d. 0

3. The 17th term of the G.P. 2, $2\sqrt{2}$, 4, $4\sqrt{2}$ ... is

a. 256 b. 512
c. $128\sqrt{2}$ d. $256\sqrt{2}$

G.P. 2, $2\sqrt{2}$, 4, $4\sqrt{2}$ .... का 17वाँ पद है

a. 256 b. 512
c. $128\sqrt{2}$ d. $256\sqrt{2}$

4. Which term of the G.P. 5, 10, 20, 40, ... is 1280?

a. 7th b. 8th
c. 9th d. 10th

G.P. 5, 10, 20, 40, ... का कौन सा पद 1280 है ?

a. 7वाँ b. 8वाँ
c. 9वाँ d. 10वाँ

5. The 10th term of G.P. 12, 4, $\frac{4}{3}$, $\frac{4}{9}$, ... is

a. $\frac{4}{3^9}$ b. $\frac{4}{3^8}$
c. $\frac{4}{3^7}$ d. $\frac{4}{3^6}$

G.P. 12, 4, $\frac{4}{3}$, $\frac{4}{9}$,..... का 10वाँ पद है

a. $\frac{4}{3^9}$ b. $\frac{4}{3^8}$
c. $\frac{4}{3^7}$ d. $\frac{4}{3^6}$

6. Which term of the G.P. $\sqrt{3}$, 3, $3\sqrt{3}$, ... is 729?

a. 11th b. 12th
c. 10th d. 13th

G.P. $\sqrt{3}$, 3, $3\sqrt{3}$, ... का कौन सा पद 729 है ?

a. 11 वाँ b. 12 वाँ
c. 10 वाँ d. 13 वाँ

7. If the nth term of the G.P. 3, $\sqrt{3}$, 1, ... is $\frac{1}{243}$, then n =

a. 12 b. 13
c. 14 d. 15

यदि G.P. 3, $\sqrt{3}$, 1, ... का nवाँ पद $\frac{1}{243}$ है तो n =

a. 12 b. 13
c. 14 d. 15

8. $\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+ \text{..... to 9 term}\right) =$

a. $\frac{151}{196}$ b. $\frac{161}{225}$
c. $\frac{171}{256}$ d. $\frac{181}{256}$

$\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+ \text{..... 9 पदों तक}\right) =$

a. $\frac{151}{196}$ b. $\frac{161}{225}$
c. $\frac{171}{256}$ d. $\frac{181}{256}$

9. 3 + 6 + 12 + 24 + ... + 1536 =

a. 1023 b. 2046
c. 3069 d. 4092

10. 2 + 6 + 18 + 54 + ... + 4374 =

a. 6450 b. 6560
c. 6380 d. 6670

11. If a, x, b are in G.P. , then

a. x = ab b. x^2 = ab
c. x = $\frac{1}{2}$ ab d. x = $\frac{1}{2}$ (a + b)

यदि a, x, b G.P. में हैं, तो

a. x = ab b. x^2 = ab
c. x = $\frac{1}{2}$ ab d. x = $\frac{1}{2}$ (a + b)

12. If $\frac{1}{3}$, x_1, x_2, 9 are in G.P., then x_1 =

a. 1 b. 3
c. 6 d. cannot be determined

यदि $\frac{1}{3}$, x_1, x_2, 9 G.P. में हैं तो x_1=

a. 1 b. 3
c. 6 d. निर्धारित नहीं किया जा सकता

13. If the nth term of a sequence be denoted by t_n,

then find t_4, if $t_n = n^4 - 64n$

a. 4 b. 64
c. 0 d. 256

यदि किसी अनुक्रम का n वाँ पद t_n द्वारा निरूपित हो, तो t_4 का मान, यदि $t_n = n^4 - 64n$ है:–

a. 4 b. 64
c. 0 d. 256

14. If $t_n = (-1)^n (n+1)^2$, then t_{15} =

a. 256 b. 32
c. 225 d. –256

यदि $t_n = (-1)^n (n+1)^2$ तो t_{15} =

a. 256 b. 32
c. 225 d. –256

15. In the sequence 1, 2, 2, 3, 3,3, 4, 4, 4, 4, ..., where n are consecutive terms have the value n, the 150th term is

a. 17 b. 16
c. 18 d. 19

अनुक्रम 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4,..... जिसमें n लगातार पदों के मान n है, 150वाँ पद होगा।

a. 17 b. 16
c. 18 d. 19

16. If the nth term of a G.P. is 2^n, the sum of its first 6 terms is

a. 124 b. 126
c. 190 d. 254

यदि किसी G.P. का n वाँ पद 2^n है, तो इसके प्रथम 6 पदों का योग है :–

a. 124 b. 126
c. 190 d. 254

17. The 4th, 7th and 10th terms of a G.P. are in

a. A.P. b. G.P.
c. H.P. d. None of these

किसी G.P. के चौथा, 7वाँ तथा 10वाँ पद हैं

a. A.P. b. G.P.
c. H.P. d. इनमें से कोई नहीं

18. If the sum of n terms of a G.P. is 2^n–1, then its common ratio is

a. 2 b. 3
c. $\frac{1}{2}$ d. $\frac{-1}{2}$

किसी G.P. के n पदों का योग 2^n–1 है, तो इसका सार्व–अनुपात है

a. 2 b. 3
c. $\frac{1}{2}$ d. $\frac{-1}{2}$

19. For any two positive numbers, we have

a. A.M. $\leq$ G.M. b. A.M. $\geq$ G.M.
c. A.M.= $\frac{3}{4}$ G.M. d. None of these

किन्ही दो धनात्मक संख्याओं के लिए,

a. A.M. $\leq$ G.M. b. A.M. $\geq$ G.M.
c. A.M.= $\frac{3}{4}$ G.M. d. इनमें से कोई नहीं

20. A.M. of 5 and 15 is

a. 10 b. 20
c. $\frac{15}{2}$ d. $\frac{25}{2}$

5 और 15 का A.M. है

a. 10 b. 20
c. $\frac{15}{2}$ d. $\frac{25}{2}$

21. G.M. of 27 and 243 is

a. 135 b. $3\sqrt{10}$
c. 81 d. $\frac{81}{2}$

27 और 243 का G.M. है

a. 135 b. $3\sqrt{10}$
c. 81 d. $\frac{81}{2}$

22. The A.M. between two positive numbers a and b (a > b) is twice their G.M., then a : b =

a. $(3+\sqrt{2}) : (3-\sqrt{2})$
b. $(2+\sqrt{3}) : (2-\sqrt{3})$
c. 2 : 3
d. None of these

दो धनात्मक संख्याओं a और b (a > b) के बीच का A.M., उनके G.M. का दो गुणा है, तो a : b =

a. $(3+\sqrt{2}) : (3-\sqrt{2})$
b. $(2+\sqrt{3}) : (2-\sqrt{3})$
c. 2 : 3
d. इनमें से कोई नहीं

23. If a, b, c are in G.P., then log a, log b, log c are in

a. AP b. GP
c. HP d. None of these

यदि a, b, c G.P. में हैं, तो log a, log b, log c हैं

a. AP b. GP
c. HP d. इनमें से कोई नहीं

24. The 4th and 7th terms of a G.P. are $\frac{1}{18}$ and $\frac{-1}{486}$ respectively. Its first term is

a. $\frac{2}{3}$ b. $\frac{-2}{3}$
c. $\frac{3}{2}$ d. $\frac{-3}{2}$

यदि किसी G.P. के चौथा एवं 7वाँ पद क्रमशः $\frac{1}{18}$,

एवं $\frac{-1}{486}$ हैं, तो पहला पद है

a. $\frac{2}{3}$ b. $\frac{-2}{3}$

c. $\frac{3}{2}$ d. $\frac{-3}{2}$

25. The 8th term from the end of the G.P. 3, 6, 12, 24, ... 12288 is

a. 96 b. 192

c. 48 d. 288

G.P. 3, 6, 12, 24, ... 12288 का अंत से 8वाँ पद है

a. 96 b. 192

c. 48 d. 288

26. The arithmetic mean of two numbers is 34 and their geometric mean is 16, The numbers are

a. 64 and 4 b. 52 and 16

c. 56 and 12 d. 60 and 8

दो संख्याओं का समांतर माध्य 34 है तथा गुणोत्तर माध्य 16 है तो संख्याएँ हैं

a. 64 और 4 b. 52 और 16

c. 56 और 12 d. 60 और 8

27. $1+\sqrt{3}+3+3\sqrt{3}+$ ..... up to 10 terms =

a. $81(\sqrt{3}+1)$ b. $100(\sqrt{3}+1)$

c. $121(\sqrt{3}+1)$ d. None of these

$1+\sqrt{3}+3+3\sqrt{3}+$ ..... 10 पदों तक =

a. $81(\sqrt{3}+1)$ b. $100(\sqrt{3}+1)$

c. $121(\sqrt{3}+1)$ d. इनमें से कोई नहीं

28. In a G.P., it is given that a = 3, t_n = 96 and S_n = 189, the value of n is

a. 7 b. 8

c. 6 d. 5

किसी दिये गये G.P. में a = 3, t_n = 96 तथा S_n = 189 तो n का मान है

a. 7 b. 8

c. 6 d. 5

29. In a G.P., the ratio between the sum of first 3 terms and the sum of first 6 terms is 125 : 152 The common ratio is

a. $\frac{1}{2}$ b. $\frac{2}{3}$

c. $\frac{3}{5}$ d. $\frac{5}{6}$

यदि किसी G.P. में प्रथम तीन पदों के योग एवं प्रथम 6 पदों के योग का अनुपात 125 : 152 है, तो सार्व अनुपात है

a. $\frac{1}{2}$ b. $\frac{2}{3}$

c. $\frac{3}{5}$ d. $\frac{5}{6}$

30. If pth, qth and rth terms of a G.P. be a, b, c respectively, then $a^{q-r}.\ b^{r-p}.\ c^{p-q}$ =

a. 0 b. 1

c. –1 d. None of these

यदि किसी G.P. के pवाँ, qवाँ तथा rवाँ पद क्रमशः a, b, c है तो $a^{q-r}.\ b^{r-p}.\ c^{p-q}$ =

a. 0 b. 1

c. –1 d. इनमें से कोई नहीं

31. Three arithmetic means between 23 and 7 are respectively

a. 11, 15, 19 b. 15, 11, 19

c. 19, 11, 15 d. 19, 15, 11

23 और 7 के बीच 3 समांतर माध्य क्रमशः हैं:–

a. 11, 15, 19 b. 15, 11, 19

c. 19, 11, 15 d. 19, 15, 11

32. Arithmetic mean between a–b and a+b is

a. a b. b

c. 0 d. None of these

a–b और a+b के बीच समांतर माध्य है

a. a b. b

c. 0 d. इनमें से कोई नहीं

33. A.M. between 14 and –6 is

a. 10 b. 7

c. 3 d. 4

14 और –6 के बीच A.M. है

a. 10 b. 7

c. 3 d. 4

34. nth term of the G.P. 2, 6, 18, 54, ... is

a. $2 \times 2^{n-1}$ b. $3 \times 2^{n-1}$

c. $2 \times 3^{n-1}$ d. 2×3^{n}

G.P. 2, 6, 18, 54, ... का nवाँ पद है

a. $2 \times 2^{n-1}$ b. $3 \times 2^{n-1}$

c. $2 \times 3^{n-1}$ d. 2×3^{n}

35. 6th term from the end of the G.P. 8, 4, 2, ... $\frac{1}{1024}$ is

a. $\frac{1}{64}$ b. $\frac{1}{32}$

c. $\frac{1}{16}$ d. $\frac{1}{128}$

G.P. 8, 4, 2, ... $\frac{1}{1024}$ का अंत से 6ठा पद है

a. $\frac{1}{64}$ b. $\frac{1}{32}$

c. $\frac{1}{16}$ d. $\frac{1}{128}$

36. 4th term from the end of the G.P. $\frac{2}{27}, \frac{2}{9}, \frac{2}{3}$, ... 162 is

a. 6 b. 54
c. 18 d. 2

G.P. $\frac{2}{27}, \frac{2}{9}, \frac{2}{3}$, ... 162 का अंत से चौथा पद है

a. 6 b. 54
c. 18 d. 2

37. The third term of a G.P. be 4. The product of its first five terms is

a. 4 b. 16
c. 64 d. 1024

किसी G.P. का तीसरा पद 4 है, इसके प्रथम पाँच पदों का गुणनफल है :–

a. 4 b. 16
c. 64 d. 1024

38. If the product of three numbers in G.P. be –1, then 2nd number is

a. 1 b. –1
c. 0 d. $\frac{1}{3}$

यदि किसी G.P. में तीन संख्याओं का गुणनफल –1 है, तो दूसरी संख्या है :–

a. 1 b. –1
c. 0 d. $\frac{1}{3}$

39. If x + 9, x – 6 and 4 are in G.P., then x is equal to

a. 0 and 6 b. 0 and –16
c. 0 and 16 d. None of these

यदि x + 9, x – 6 और 4 G.P. में हैं तो x का मान है

a. 0 और 6 b. 0 और –16
c. 0 और 16 d. इनमें से कोई नहीं

40. Sum of the series 5 + 55 + 555 + ... to n terms is

a. $\frac{5}{9} \times (10^{n+1} - 9n - 10)$

b. $\frac{5}{81} \times (10^{n} - 9n - 10)$

c. $\frac{5}{9} \times (10^{n} - 9n - 10)$

d. $\frac{5}{81} \times (10^{n+1} - 9n - 10)$

श्रेणी 5 + 55 + 555 + ... n पदों तक का योगफल है

a. $\frac{5}{9} \times (10^{n+1} - 9n - 10)$

b. $\frac{5}{81} \times (10^{n} - 9n - 10)$

c. $\frac{5}{9} \times (10^{n} - 9n - 10)$

d. $\frac{5}{81} \times (10^{n+1} - 9n - 10)$

41. G.M. between –6 and 9 is

a. $3\sqrt{6}$ b. $-3\sqrt{6}$
c. $\sqrt{6}$ d. Does not exist

– 6 और 9 का G.M. है

a. $3\sqrt{6}$ b. $-3\sqrt{6}$
c. $\sqrt{6}$ d. प्राप्त नहीं होता है।

42. If $x \in R$, the minimum value of $3^x + 3^{1-x}$ is

a. 2 b. $\sqrt{3}$
c. $2\sqrt{3}$ d. Does not exist

यदि $x \in R$, तो $3^x + 3^{1-x}$ का न्यूनतम मान है

a. 2 b. $\sqrt{3}$
c. $2\sqrt{3}$ d. प्राप्त नहीं होता है।

43. If a, b, c, d are four distinct positive numbers in G.P., then a + d .... b + c

a. > b. <
c. ≥ d. ≤

यदि चार भिन्न धनात्मक संख्याएँ a, b, c, d G.P. में है, तो a + d .... b + c.

a. > b. <
c. ≥ d. ≤

44. If the A. M. and G.M. of the roots of a quadratic equation be 8 and 5 respectively, the equation is

a. $x^2 - 8x + 5 = 0$
b. $x^2 - 16x + 25 = 0$
c. $x^2 - 5x + 8 = 0$
d. $x^2 - 25x + 16 = 0$

यदि किसी द्विघात समीकरण के मूलों के A.M. एवं G.M. क्रमशः 8 और 5 हैं, तो समीकरण है :

a. $x^2 - 8x + 5 = 0$
b. $x^2 - 16x + 25 = 0$
c. $x^2 - 5x + 8 = 0$
d. $x^2 - 25x + 16 = 0$

45. Two G.M. between 3 and 81 are

a. 3 and 27 b. 9 and 27
c. 27 and 81 d. None of these

3 और 81 के बीच दो G.M. हैं :

a. 3 और 27 b. 9 और 27
c. 27 और 81 d. इनमें से कोई नहीं

46. If A.M. and G.M. of two positive numbers a and b are 10 and 8 respectively, then numbers are

a. 16 and 4 b. 4 and 16
c. both a and b d. None of these

यदि दो घनात्मक संख्याओं a और b के A.M. एवं G.M. क्रमशः 10 और 8 हैं तो संख्याएँ हैं :

a. 16 और 4 b. 4 और 16
c. दोनों a तथा b d. इनमें से कोई नहीं

47. If the 5th term of a G.P. is 2, then the product of its first nine terms is

a. 512 b. 1024
c. 256 d. 128

यदि किसी G.P. का 5वाँ पद 2 है तो इसके प्रथम 9 पदों का गुणनफल है :

a. 512 b. 1024
c. 256 d. 128

48. If a, b, c are in G.P. and $a^{1/x} = b^{1/y} = c^{1/z}$, then x, y, z are in

a. G.P.
b. A.P.
c. A.P. and G.P. both
d. None of these

यदि a, b, c G.P. में है तथा $a^{1/x} = b^{1/y} = c^{1/z}$, तो x, y, z है:

a. G.P.
b. A.P.
c. A.P. और G.P. दोनों
d. इनमें से कोई नहीं

49. The 2nd term of a G.P. is 24 and its fifth term is 81, then common ratio is

a. 3 b. $\frac{3}{2}$
c. $\frac{2}{3}$ d. 16

यदि किसी G.P. का द्वितीय पद 24 एवं पंचम् पद 81 है तो सार्व–अनुपात है

a. 3 b. $\frac{3}{2}$
c. $\frac{2}{3}$ d. 16

50. The arithmetic and geometric mean of the roots of a quadratic equation are A and G respectively, then the equation is

a. $x^2 - Ax + G^2 = 0$
b. $x^2 - 2Ax + G = 0$
c. $x^2 - 2Ax + G^2 = 0$
d. $x^2 - Ax + 2G^2 = 0$

यदि किसी द्विघात समीकरण के मूलों के समांतर एवं गुणोत्तर माध्य क्रमशः A एवं G हैं, तो समीकरण होगा:

a. $x^2 - Ax + G^2 = 0$
b. $x^2 - 2Ax + G = 0$
c. $x^2 - 2Ax + G^2 = 0$
d. $x^2 - Ax + 2G^2 = 0$

51. The nth A.M. between a and b is

a. $\frac{b-a}{n+1}$ b. $\frac{n(b-a)}{n+1}$
c. $a + \frac{b-a}{n+1}$ d. $a + \frac{n(b-a)}{n+1}$

a और b के बीच nवाँ A.M. है :–

a. $\frac{b-a}{n+1}$ b. $\frac{n(b-a)}{n+1}$
c. $a + \frac{b-a}{n+1}$ d. $a + \frac{n(b-a)}{n+1}$

52. If a and b are the first and last terms of an A.P., the sum of n arithmetic means between a and b is

a. $a + b$ b. $\frac{n(a+b)}{2}$
c. $na + \frac{n^2(b-a)}{n+1}$ d. $na + \frac{n(b-a)}{n+1}$

यदि किसी A.P. का प्रथम पद a, अंतिम पद b हो, तो उनके बीच n समांतर माध्यों का योगफल होगा।

a. $a + b$ b. $\frac{n(a+b)}{2}$
c. $na + \frac{n^2(b-a)}{n+1}$ d. $na + \frac{n(b-a)}{n+1}$

53. 4 A.M.'s between –7 and 3 are

a. –6, –4, –2, 0 b. –5, –3, –1, 1
c. –4, –2, 0, 2 d. None of these

–7 और 3 के बीच 4 समांतर माध्य हैं :–

a. –6, –4, –2, 0 b. –5, –3, –1, 1
c. –4, –2, 0, 2 d. इनमें से कोई नहीं

54. If $\frac{x^{p+1} + y^{p+1}}{x^p + y^p}$ be the arithmetic mean between x and y, then value of p is

a. 1 b. 0
c. –1 d. 2

यदि x और y के बीच $\frac{x^{p+1} + y^{p+1}}{x^p + y^p}$ एक समांतर माध्य है, तो p का मान है

a. 1 b. 0
c. –1 d. 2

55. If $\frac{x^p + y^p}{x^{p-1} + y^{p-1}}$ be the A.M. between x and y, then value of p is

a. 0 b. 1
c. 2 d. –1

यदि $\frac{x^p + y^p}{x^{p-1} + y^{p-1}}$, x और y के बीच एक समांतर माध्य है, तो p का मान है–

a. 0 b. 1
c. 2 d. –1

56. If the A.M. of two numbers is twice their G.M., the two numbers will be in the ratio

a. $\frac{3+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$ b. $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$

c. $\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ d. $\frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$

यदि दो संख्याओं का A.M., उनके G.M. का दोगुना है, तो संख्याओं का अनुपात है :–

a. $\frac{3+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$ b. $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$

c. $\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ d. $\frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$

57. If n geometric means be inserted between two numbers a and b, then their product is

a. $(ab)^{1/2}$ b. $(ab)^n$

c. $(ab)^{n/2}$ d. $(ab)^{2n}$

यदि दो संख्याओं a और b के बीच n गुणोत्तर माध्य रखे गए हैं, तो उनका गुणनफल होगा

a. $(ab)^{1/2}$ b. $(ab)^n$

c. $(ab)^{n/2}$ d. $(ab)^{2n}$

58. If the A.M. and G.M. between two numbers be respectively A and G, then numbers are

a. $A^2 \pm G^2$ b. $\sqrt{A^2 \pm G^2}$

c. $A \pm \sqrt{A^2 - G^2}$ d. None of these

यदि दो संख्याओं के A.M. एवं G.M. क्रमशः A एवं G हो, तो संख्याएँ हैं :–

a. $A^2 \pm G^2$ b. $\sqrt{A^2 \pm G^2}$

c. $A \pm \sqrt{A^2 - G^2}$ d. इनमें से कोई नहीं

59. The value of n such that $\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$ may be the G.M. between a and b is

a. –1 b. 0

c. $\frac{1}{2}$ d. $-\frac{1}{2}$

यदि $\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$, a और b के बीच एक G.M. है तो n का मान है :–

a. –1 b. 0

c. $\frac{1}{2}$ d. $-\frac{1}{2}$

60. If quantities 2, a, b, c, d, e, 8 are in A.P., then a + b + c + d + e is equal to

a. 10 b. 20

c. 25 d. 30

यदि राशियां 2, a, b, c, d, e, 8 A.P. में हैं तो a + b + c + d + e का मान है :–

a. 10 b. 20

c. 25 d. 30

61. If 1, x, y, z, 2 are in G.P. , then xyz =

a. 4 b. 2

c. 8 d. None of these

यदि 1, x, y, z, 2 G.P. में हैं तो xyz =

a. 4 b. 2

c. 8 d. इनमें से कोई नहीं

62. If P is the product of n G.M.'s between a and b, then P^2 is equal to

a. $(ab)^{1/2}$ b. $(ab)^n$

c. $(ab)^{n/2}$ d. $(ab)^{2n}$

यदि दो संख्याओं a और b के बीच n गुणोत्तर माध्यों का गुणनफल P है, तो P^2 बराबर है

a. $(ab)^{1/2}$ b. $(ab)^n$

c. $(ab)^{n/2}$ d. $(ab)^{2n}$

63. If $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, then $\tan\theta + \cot\theta$ is

a. < 2 b. ≥ 2

c. < 1 d. ≥ 1

यदि $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, तो $\tan\theta + \cot\theta$ है

a. < 2 b. ≥ 2

c. < 1 d. ≥ 1

64. If $0 < x < \frac{\pi}{2}$, then $\sin x + \operatorname{cosec} x$ is

a. > 2 b. < 2

c. ≥ 2 d. ≤ 2

यदि $0 < x < \frac{\pi}{2}$, तो $\sin x + \operatorname{cosec} x$ है

a. > 2 b. < 2

c. ≥ 2 d. ≤ 2

65. If the quantities are in G.P., then their logarithms are in

a. A.P. b. G.P.

c. A.P. and G.P. d. None of these

यदि संख्याएँ G.P. में हों, तो उनके लघुगणक होंगे :–

a. A.P. b. G.P.

c. A.P. और G.P.में d. इनमें से कोई नहीं

66. The sum to n terms of the G.P. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...$ is

a. $\frac{1}{2^n}$ b. $\frac{1}{2^n}+1$

c. $2(1-\frac{1}{2^n})$ d. $1-\frac{1}{2^n}$

G.P. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...$ के n पदों का योग है :–

a. $\frac{1}{2^n}$ b. $\frac{1}{2^n}+1$

c. $2(1-\frac{1}{2^n})$ d. $1-\frac{1}{2^n}$

67. The sum to n terms of the series $10 + 5+\frac{5}{2}+\frac{5}{4}+...$ is

a. $10(1-\frac{1}{2^n})$ b. $30(1-\frac{1}{2^n})$

c. $20(1-\frac{1}{2^n})$ d. $15(\frac{1}{2^n}-1)$

श्रेणी $10+5+\frac{5}{2}+\frac{5}{4}$... के n पदों का योग है :–

a. $10(1-\frac{1}{2^n})$ b. $30(1-\frac{1}{2^n})$

c. $20(1-\frac{1}{2^n})$ d. $15(\frac{1}{2^n}-1)$

68. If (2p) th term of a G.P. is q^2 and (2q)th term is p^2, then (p + q)th term is

a. pq b. p^2q^2

c. $\frac{1}{2}p^2q^2$ d. $\frac{1}{4}p^3q^3$

यदि किसी G.P. का (2p)वाँ पद q^2 तथा (2q)वाँ पद p^2 है, तो (p + q)वाँ पद है

a. pq b. p^2q^2

c. $\frac{1}{2}p^2q^2$ d. $\frac{1}{4}p^3q^3$

69. If first and eighth term of a G.P. be x^{-4} and x^{52} and its second term is x^t, then t =

a. –13 b. 4

c. $\frac{5}{2}$ d. 3

यदि किसी G.P. का प्रथम पद x^{-4} आठवाँ पद x^{52} है तथा दूसरा पद x^t है, तो t =

a. –13 b. 4

c. $\frac{5}{2}$ d. 3

70. If sum to n terms of a sequence be $n^2 + 2n$, then that sequence will be

a. A.P.

b. G.P.

c. A.P. and G.P. both

d. None of these

यदि किसी अनुक्रम के n पदों का योग $n^2 + 2n$ है तो वह अनुक्रम होगा

a. A.P.

b. G.P.

c. A.P. और G.P. दोनों

d. इनमें से कोई नहीं

71. If a, b, c are in G.P., then a^2, ab, ac are in

a. A.P. b. G.P.

c. H.P. d. None of these

यदि a, b, c G.P., में हैं, तो a^2, ab, ac है

a. A.P. b. G.P.

c. H.P. d. इनमें से कोई नहीं

Very Short Answer Type Questions
(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

1. Find the ninth term of 1,4,16,64, ...

   1, 4, 16, 64 ..... का नौवां पद ज्ञात कीजिए।

2. Write down the common ratio and the tenth term of the geometrical series $3 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + ...$

   गुणोत्तर श्रेणी $3 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + ...$ का सार्व अनुपात और दसवां पद लिखें।

3. If $x - 2, x, x + 3$ are in G.P., then find the value of x.

   यदि $x - 2, x, x + 3$ G.P. में हों, तो x का मान निकालें।

4. The fourth term of a G.P. is 27 and the 7th term is 729, find the series.

   किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी का चौथा पद 27 तथा 7वाँ 729 है तो श्रेणी ज्ञात करें।

5. If $1 + 2 + 2^2 + ... +2^{n-1} = 255$, then find n.

   यदि $1 + 2 + 2^2 + ... +2^{n-1} = 255$ तो n ज्ञात करें।

6. If a is the G.M. of 2 and $\frac{1}{4}$, find a.

   यदि 2 और $\frac{1}{4}$ का गुणोत्तर माध्य a हो, तो a निकालें।

7. The third term of a geometric progression is 4. Find the product of first five terms.

   यदि किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी का तीसरा पद 4 है, तो प्रथम पाँच पदों का गुणनफल ज्ञात करें।

8. Which term of the series $\frac{4}{27} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + ...$ is 243?

   श्रेणी $\frac{4}{27} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + ...$ का कौन सा पद 243 होगा ?

9. Find the 6th term from the end of the G.P. 8, 4, 2, ... $\frac{1}{1024}$

   G.P. 8, 4, 2, ... $\frac{1}{1024}$ का अंत से छठा पद ज्ञात करें।

10. Find the sum of 8 terms of the G.P. 3, 6, 12, 24,.....

    G.P. 3, 6, 12, 24,..... के 8 पदों का योगफल ज्ञात करें।

11. Find the sum of the series 2 + 6 + 18 + 54 + ... +4374

    श्रेणी 2 + 6 + 18 + 54 + ... + 4374 का योगफल ज्ञात करें।

12. Find the sum of the G.P. $1 - a + a^2 - a^3 + ...$ to n terms ($a \neq 1$).

G.P. $1 - a + a^2 - a^3 + ...$ का n पदों तक योगफल ज्ञात करें, जहाँ ($a \neq 1$).

13. Evaluate $\sum_{n=1}^{8} 5^n$

मान निकालें :– $\sum_{n=1}^{8} 5^n$

14. Find two positive numbers a and b, whose A.M. = 25 and G.M. = 20

दो घनात्मक संख्याएँ a और b ज्ञात करें, जिसका A.M. = 25 और G.M. = 20 है।

15. The ratio of the sum of first three terms is to that of first six terms of a G.P. is 125 : 152. Find the common ration.

किसी G.P. के प्रथम तीन पदों के योगफल एवं प्रथम छः पदों के योगफल का अनुपात 125 : 152 है, तो सार्व अनुपात ज्ञात कीजिए।

Short Answer Type Questions
(लघु उत्तरीय प्रश्न)

1. The product of three numbers in G.P. is 216 and their sum is 21. find the numbers.

गुणोत्तर श्रेढ़ी में तीन संख्याओं का गुणनफल 216 तथा योगफल 21 है। संख्याएँ ज्ञात करें।

2. If a, b, c, d are in G.P., then prove that $(b - c)^2 + (c - a)^2 + (d - b)^2 = (a - d)^2$.

यदि a, b, c, d G.P. में हैं तो सिद्ध करें कि $(b - c)^2 + (c - a)^2 + (d - b)^2 = (a - d)^2$.

3. Find 5 geometric means between 16 and $\frac{1}{4}$

16 और $\frac{1}{4}$ के बीच 5 गुणोत्तर माध्य ज्ञात करें।

4. If $a^x = b^y = c^z$ and a, b, c are in G.P., then prove that $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ are in A.P.

यदि $a^x = b^y = c^z$ तथा a, b, c गु. श्रे. में हैं, तो सिद्ध करें कि $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ सं. श्रे. में होंगे।

5. The (p + q)th term of a G.P. is a and the (p – q)th term is b, prove that the pth term is $\sqrt{ab}$.

किसी गु. श्रे. का (p + q)वाँ पद a तथा (p – q)वाँ पद b है, तो सिद्ध कीजिए कि pवाँ पद $\sqrt{ab}$ होगा।

6. The 5th, 8th and 11th terms of a G.P. are p, q and s respectively. show that $q^2 = ps$.

किसी गु. श्रे. के 5वाँ, 8वाँ एवं 11वां पद क्रमशः p, q तथा s हैं। सिद्ध करें कि $q^2 = ps$.

7. The 4th term of a G.P. is square of its 2nd term, and the first term is – 3. Determine its 7th term.

किसी G.P. का चौथा पद दूसरे पद का वर्ग है तथा पहला पद – 3 है। इसका 7वाँ पद ज्ञात करें।

8. Evaluate $\sum_{k=1}^{n} (2 + 3^k)$

मान निकालें $\sum_{k=1}^{n} (2 + 3^k)$

9. If the 4th, 10th and 16th terms of a G.P. are x, y, and z respectively. Prove that x, y, z are in G.P.

किसी G.P. का चौथा, दसवाँ एवं सोलहवाँ पद क्रमश x, y और z है। सिद्ध करें कि x, y, z G.P. में हैं।

10. Find the sum to n terms of the series 8 + 88 + 888 + ...

श्रेणी 8 + 88 + 888 + ... का n पदों तक योग ज्ञात करें।

11. Find the sum of the products of the corresponding terms of the sequence 2, 4, 8, 16, 32 and 128, 32, 8, 2, $\frac{1}{2}$.

अनुक्रम 2, 4, 8, 16, 32 एवं 128, 32, 8, 2, $\frac{1}{2}$ के संगत पदों के गुणनफल से बने अनुक्रम का योग ज्ञात करें।

Long Answer Type Questions
(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

1. If the sum to n terms of a geometric progression is S, their product is P and the sum of their reciprocals is R then, prove that $P^2 = \left(\frac{S}{R}\right)^n$.

यदि किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी के n पदों का योगफल S हो, उनका गुणनफल P हो और उनके व्युत्क्रमों का योगफल R हो, तो सिद्ध करें कि $P^2 = \left(\frac{S}{R}\right)^n$.

2. If S_1, S_2, S_3 be the sums of a G.P. of n, 2n, 3n terms respectively, then Prove that $S_1^2 + S_2^2 = S_1(S_2 + S_3)$.

यदि गु. श्रे. के n, 2n, 3n पदों का योग क्रमशः S_1, S_2, S_3 हों, तो सिद्ध करें कि $S_1^2 + S_2^2 = S_1(S_2 + S_3)$.

3. If the A.M. between a and b is twice as great as the geometric mean, show that

$a : b = (2 + \sqrt{3}) : (2 - \sqrt{3})$

यदि a और b के बीच का समांतर माध्य इनके बीच के गुणोत्तर माध्य का दुगुना हो, तो सिद्ध करें कि

$a : b = (2+\sqrt{3}) : (2-\sqrt{3})$

Answer of Multiple Choice Questions
(बहु विकल्पीय प्रश्नोत्तर)

(1)	a	(2)	b	(3)	b	(4)	c	(5)	b
(6)	b	(7)	b	(8)	c	(9)	c	(10)	b
(11)	b	(12)	a	(13)	c	(14)	d	(15)	a
(16)	b	(17)	b	(18)	a	(19)	b	(20)	a
(21)	c	(22)	b	(23)	a	(24)	d	(25)	a
(26)	a	(27)	c	(28)	c	(29)	c	(30)	b
(31)	d	(32)	a	(33)	d	(34)	c	(35)	b
(36)	a	(37)	d	(38)	b	(39)	c	(40)	d
(41)	d	(42)	c	(43)	a	(44)	b	(45)	b
(46)	c	(47)	a	(48)	b	(49)	b	(50)	c
(51)	d	(52)	b	(53)	b	(54)	b	(55)	b
(56)	b	(57)	c	(58)	c	(59)	d	(60)	c
(61)	d	(62)	b	(63)	b	(64)	c	(65)	a
(66)	c	(67)	c	(68)	a	(69)	b	(70)	a
(71)	b.								

Short Answer Type Questions
(लघु उत्तरीय प्रश्न)

1. Given sequence is 1,4,16,64,.....

   Clearly it is a G.P., in which

   $a=1, \quad r=4.$

   $\therefore\ t_9 = ar^{9-1} = ar^8 = 1\times 4^8 = 65{,}536.$

2. Given series is $3-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+.....$

   Here $r=\frac{-1}{3}$ and a=3.

   $\therefore\ t_{10} = ar^{10-1} = 3\left(\frac{-1}{3}\right)^9 = \frac{-1}{6561}$

   $\therefore$ Common ratio$=\frac{-1}{3}$ and 10th term $=\frac{-1}{6561}$

3. Since x-2,x,x+3 are in G.P.

   $\therefore\quad x^2=(x-2)(x+3)$

   or, $\quad x^2=x^2+x-6$

   or, $\quad x^2-x^2-x+6=0$

   or, $\quad -x+6=0$

   $\therefore\quad x=6$

4. We have $t_4=27$ and $t_7=729$.

   Let a be the 1st term and r be the c.r.

   $\therefore\quad ar^3=27$ .....(i)

   and $\quad ar^6=729$ .....(ii)

   dividing (ii) by (i), we get

   $\frac{ar^6}{ar^3}=\frac{729}{27} \Rightarrow r^3=27 \Rightarrow r=3.$

   $\therefore$ From (i), $a\times 3^3=27 \Rightarrow a=1.$

   $\therefore$ Series is,

   1+3+9+27+.....

5. Since $1+2+2^2+.....+2^{n-1}=255$

   $\therefore\quad \frac{1(2^n-1)}{2-1}=255$

   $\therefore\quad 2^n-1=255$

   $\therefore\ 2^n=255+1=256$

   or, $\quad 2^n=2^8 \Rightarrow n=8.$

6. Since a is the G.M. of 2 and $\frac{1}{4}$

   $\therefore\quad a=\sqrt{2\times\frac{1}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$

7. Let a be the 1st term and r be the c.r. of G.P.

   $\because\quad t_3=4$

   $\therefore\quad ar^2=4$ .....(i)

   Now, Product of 1st five terms

   $=a.ar.ar^2.ar^3.ar^4$

   $=a^5r^{1+2+3+4}$

   $=a^5.r^{10}=(ar^2)^5=(4)^5=1024.$

8. Given series is $\frac{1}{27}+\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+.....$

   Here $a=\frac{1}{27}$, r=3.

   Let $t_n=243$

   $\therefore\quad \frac{1}{27}.3^{n-1}=243$

   or, $\quad \frac{1}{3^3}\times 3^{n-1}=243$

   or, $\quad 3^{n-1-3}=243$

   or, $\quad 3^{n-4}=3^5$

   $\Rightarrow\quad n-4=5$

   $\therefore\quad n=5+4=9$

   $\therefore\quad$ 9th term is 243.

9. Given G.P. is 8,4,2,....., $\frac{1}{1024}$

Here a=8, $r=\frac{1}{2}$, $t_n=\frac{1}{1024}$

$\therefore \quad 8\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{1024}$

or, $2^3.\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{10}}$

or, $\frac{1}{2^{n-4}}=\frac{1}{2^{10}}$

$\Rightarrow \quad 2^{n-4}=2^{10} \Rightarrow n-4=10$

$\therefore \quad n=10+4=14$

$\therefore$ Total number of terms = 14

$\therefore$ 6th term from the end = (14-6+1)=9th term from the begining.

Hence 6th term from end $=8\left(\frac{1}{2}\right)^{9-1}=8\times\frac{1}{2^8}=\frac{1}{32}$

.

10. Given G.P. is 3,6,12,24,.....

Here a=3, r=2, n=8.

$\therefore S_8=\frac{3(2^8-1)}{2-1}=3(2^8-1)=3\times(256-1)$

$=3\times255=765.$

11. Given series is 2+6+18+54+.....+4374

Here a=2, r=3, t_n=4374, s_n=?

$\therefore \quad 4374=2.3^{n-1}$

$\therefore \quad \frac{4374}{2}=3^{n-1}$

$\Rightarrow \quad 2187=3^{n-1}$

$\therefore \quad 3^7=3^{n-1}$

$\therefore \quad 7=n-1$

$\therefore \quad n=8.$

$\therefore \quad S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$

or $S_8=\frac{2(3^8-1)}{3-1}=\frac{2(3^8-1)}{2}$

$=3^8-1=6561-1=6560.$

12. Given G.P. is $1-a+a^2-a^3+$..... to n terms.

Here 1st term = 1, common ratio, r = −a.

$\therefore S_n=\frac{1[1-(-a)^n]}{1-(-a)}=\frac{1-(-a)^n}{1+a}$

$=\frac{1-(-1)^n.a^n}{1+a}$

13. $\sum_{n=1}^{8}5^n=5^1+5^2+5^3+.....+5^8.$

Clearly it is a G.P., where a=5, r=5.

$S_8=\frac{5(5^5-1)}{5-1}=\frac{5}{4}(5^5-1)$

$=\frac{5}{4}(3125-1)=\frac{5}{4}\times3124$

$=5\times781=3905$

14. We have, $\frac{a+b}{2}=25$

$\therefore$ a+b=50 .....(i)

Also, $\sqrt{ab}=20 \Rightarrow ab=400$ .....(ii)

$\therefore a-b=\sqrt{(a+b)^2-4ab}=\sqrt{(50)^2-4\times400}$

$=\sqrt{2500-1600}=\sqrt{900}=30$

$\therefore$ a-b=30.....(iii)

On solving (i) and (iii) , we get a=40 , b=10.

15. Let a be the 1st term and r the c.r. of G.P.

$\therefore \frac{a+ar+ar^2}{a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+ar^5}=\frac{125}{152}$

or, $\frac{\frac{a(r^3-1)}{r-1}}{\frac{a(r^6-1)}{r-1}}=\frac{125}{152}$

$\Rightarrow \frac{r^3-1}{r^6-1}=\frac{125}{152} \Rightarrow \frac{r^3-1}{(r^3+1)(r^3-1)}=\frac{125}{152}$

$\therefore \frac{1}{r^3+1}=\frac{125}{152} \Rightarrow 152=125r^3+125$

$\Rightarrow 27=125r^3 \Rightarrow r^3=\frac{27}{125}=\left(\frac{3}{5}\right)^3 \Rightarrow r=\frac{3}{5}$

Short Answer Type Questions
(लघु उत्तरीय प्रश्न)

1. Let three numbers in G.P. be $\frac{a}{r}$, a and ar.

$\therefore \frac{a}{r}\times a\times ar=216 \Rightarrow a^3=216$

$\therefore a=6$

Now, $\frac{a}{r}+a+ar=21$

$\therefore \quad \frac{6}{r}+6+6r=21$

$\Rightarrow \quad \frac{6}{r}+6r=15$

or, $\frac{6+6r^2}{r}=15$

or, $6+6r^2=15r$

$\therefore \quad 6r^2-15r+6=0$

or, $2r^2 - 5r + 2 = 0$

$\Rightarrow$ $2r^2 - 4r - r + 2 = 0$

$\Rightarrow$ $2r(r-2)-1(r-2)=0$

$\Rightarrow$ $(2r-1)(r-2)=0$

$\Rightarrow$ $r=\frac{1}{2}$ or, 2 .

If $r=\frac{1}{2}$, then numbers are $\frac{6}{\frac{1}{2}}, 6, 6\times\frac{1}{2}$

i.e. 12 , 6 , 3

If r=2 , then umbers are $\frac{6}{2}$, 6, 6×2

= 3 , 6 , 12

Hence required numbers are 12,6,3 or 3,6,12.

2. Let c.r. of G.P. be r.

Since a,b,c,d are in G.P.

$\therefore$ $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c}=r$

$\therefore$ $b=ar$, $c=br=ar^2$, $d=cr=ar^3$

Now, L.H.S. = $(b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2$

$=(ar-ar^2)^2+(ar^2-a)^2+(ar^3-ar)^2$

$=a^2[(r-r^2)^2+(r^2-1)^2+(r^3-r)^2]$

$=a^2[r^2-2r^3+r^4+r^4-2r^2+1+r^6-2r^4+r^2]$

$=a^2[r^6-2r^3+1]$

$=a^2(1-r^3)^2=(a-ar^3)^2$

$=(a-d)^2$=R.H.S

3. Let five geometric means between 16 and $\frac{1}{4}$ be g_1 , g_2 , g_3 , g_4 and g_5.

$\therefore$ 16 , g_1 , g_2 , g_3 , g_4 , g_5 , $\frac{1}{4}$ are in G.P.

Let r be the c.r.

$\therefore$ $\frac{1}{4}$ = 7th term = $16.r^{7-1}=16.r^6$

$\therefore$ $r^6=\frac{1}{64}=\left(\frac{1}{2}\right)^6 \Rightarrow r=\frac{1}{2}$

$\therefore$ g_1=2nd term=$16\times\frac{1}{2}=8$

$g_2=16\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=4$

$g_3=16\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=2$

$g_4=16\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=1$

$g_5=16\times\left(\frac{1}{2}\right)^5=16\times\frac{1}{32}=\frac{1}{2}$

$\therefore$ Required means are 8,4,2,1, $\frac{1}{2}$.

4. $\because$ $a^x=b^y=c^z=k$ (say)

$\therefore$ $a=k^{\frac{1}{x}}$, $b=k^{\frac{1}{y}}$ and $c=k^{\frac{1}{z}}$

Also, a,b,c are in G.P.

$\therefore$ $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$

$\Rightarrow$ $\frac{k^{\frac{1}{y}}}{k^{\frac{1}{x}}}=\frac{k^{\frac{1}{z}}}{k^{\frac{1}{y}}}$

$\Rightarrow$ $k^{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}}=k^{\frac{1}{z}-\frac{1}{y}}$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\frac{1}{z}-\frac{1}{y}$

$\therefore$ $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ are in A.P.

5. Let 1st term of G.P. be x and common ratio be r.

$\because$ $(p+q)^{th}$ term = a

$\therefore$ $xr^{p+q-1}=a$ .....(i)

Also, $(p-q)^{th}$ term = b

$\therefore$ $xr^{p-q-1}=b$ .....(ii)

Multiplying (i) and (ii) , we get

$x.r^{p+q-1}.\ xr^{p-q-1}=ab$

or, $x^2r^{p+q-1+p-q-1}=ab$

or, $x^2r^{2p-2}=ab$

or, $(xr^{p-1})^2=ab$

$\therefore$ $xr^{p-1}=\sqrt{ab}$

$\therefore$ p^{th} term = $\sqrt{ab}$

6. Let 1st term of G.P. be a and common ratio be r.

$\because$ $t_5=p$

$\therefore$ $ar^4=p$ .....(i)

Also, $t_8=q$

$\therefore$ $ar^7=q$ .....(ii)

and $t_{11}=s$

$\therefore$ $ar^{10}=s$ .....(iii)

on multiplying (i) and (iii) , we get

$ar^4.ar^{10}=ps$

or, $a^2r^{14} = ps$

or, $(ar^7)^2 = ps$

$\therefore$ $q^2 = ps$ (by (ii) $q = ar^7$)

Hence, $q^2 = ps$.

7. Let r be the common ratio of G.P.

$\therefore$ $-3.r^3 = (-3r)^2$

or, $-3r^3 = 9r^2$

$\therefore$ $\frac{r^3}{r^2} = \frac{9}{-3} \Rightarrow r = -3$

$\therefore$ 7th term $= (-3)(-3)^{7-1} = (-3)^7 = -2187$.

8. $\sum_{k=1}^{11}(2+3^k) = \sum_{k=1}^{11}2 + \sum_{k=1}^{11}3^k$

$= 11\times2+(3^1+3^2+3^3+.....+3^{11})$

$= 22 + \frac{3(3^{11}-1)}{3-1} = 22 + \frac{3(3^{11}-1)}{2}$

$= \frac{44+3^{12}-3}{2} = \frac{3^{12}+41}{2}$

9. Let a be the 1st term and r be the common ratio of G.P.

$\because$ $t_4 = x$

$\therefore$ $ar^3 = x$ .....(i)

Also, $t_{10} = y$

$\therefore$ $ar^9 = y$ .....(ii)

and $t_{16} = z$

$\therefore$ $ar^{15} = z$ .....(iii)

Multiplying (i) and (iii), we get

$ar^3.ar^{15} = xz$

or, $a^2r^{18} = xz$

or, $(ar^9)^2 = xz$

$\therefore$ $y^2 = xz$ (by (ii) $ar^9 = 4$)

$\Rightarrow$ x,y,z are in G.P.

10. Given series is 8+88+888+..... upto n terms.

Let S=8+88+888+.....to n terms

$= 8[1+11+111+.....\text{to n terms}]$

$= \frac{8}{9}[9+99+999+.....\text{to n terms}]$

$= \frac{8}{9}[(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+.....\text{to n terms}]$

$= \frac{8}{9}[\{10+10^2+10^3+...\text{to n terms}\}-\{1+1+1+...\text{to n terms}\}]$

$= \frac{8}{9}\left[\frac{10(10^n-1)}{10-1} - n\right] = \frac{8}{9}\left[\frac{10(10^n-1)}{9} - n\right]$

$= \frac{8}{9}\left[\frac{10(10^n-1)-9n}{9}\right] = \frac{8}{81}[10^{n+1}-9n-10]$

11. Let $S = 2\times128+4\times32+8\times8+16\times2+32\times\frac{1}{2}$

$= 256+128+64+32+16$

Which is clearly a G.P.

Here, $a = 256$, $r = \frac{1}{2}$ and $n = 5$

$\therefore$ $S = \frac{256\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right]}{1-\frac{1}{2}} = \frac{256\left[1-\frac{1}{32}\right]}{\frac{1}{2}}$

$= 256\times\frac{31}{32}\times\frac{2}{1} = 16\times31 = 496$

Long Answer Type Questions
(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

1. Let G.P. be a , ar , ar^2 , ar^3 , ...ar^{n-1}.

$\therefore$ $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ .....(i)

Also, $P = a.ar.ar^2.ar^3.....ar^{n-1}$

$= a^n.r^{1+2+3+.....+(n-1)}$

$\therefore$ $P = a^n.r^{\frac{n(n-1)}{2}}$ .....(ii)

and $R = \frac{1}{a} + \frac{1}{ar} + \frac{1}{ar^2} + ... + \frac{1}{ar^{n-1}}$

It is also a G.P. in which 1st term $= \frac{1}{a}$ and common ratio $= \frac{1}{r}$.

$\therefore R = \frac{\frac{1}{a}\left[\frac{1}{r^n}-1\right]}{\frac{1}{r}-1} = \frac{1}{a}.\frac{1-r^n}{r^n}.\frac{r}{1-r}$ .....(iii)

dividing (i) by (iii) , we get

$\frac{S}{R} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}\times\frac{a.r^n(1-r)}{(1-r^n).r}$

$= a^2r^{n-1}$

$\therefore \left(\frac{S}{R}\right)^n = (a^2r^{n-1})^n = a^{2n}r^{n(n-1)}$

$= \left[a^n r^{\frac{n(n-1)}{2}}\right]^2 = P^2$ (by (ii))

Hence $P^2 = \left(\frac{S}{R}\right)^n$

2. Let 1st term of G.P. be a and common ratio be r.

$\therefore S_1 = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$, $S_2 = \frac{a(1-r^{2n})}{1-r}$, $S_3 = \frac{a(1-r^{3n})}{1-r}$

Now, L.H.S. = $S_1^2 + S_2^2$

$$= \frac{a^2}{(1-r)^2}[(1-r^n)^2 + (1-r^{2n})^2]$$

$$= \frac{a^2}{(1-r)^2}[1 - 2r^n + r^{2n} + 1 - 2r^{2n} + r^{4n}]$$

$$= \frac{a^2}{(1-r)^2}(2 - 2r^n - r^{2n} + r^{4n}) \quad .....(i)$$

R.H.S. = $S_1(S_2+S_3)$

$$= \frac{a(1-r^n)}{1-r}\left[\frac{a(1-r^{2n})}{1-r} + \frac{a(1-r^{3n})}{1-r}\right]$$

$$= \frac{a^2}{(1-r)^2}[1 - r^{2n} - r^n + r^{3n} + 1 - r^{3n} - r^n + r^{4n}]$$

$$= \frac{a^2}{(1-r)^2}(2 - 2r^n - r^{2n} + r^{4n}) \quad .....(ii)$$

$\therefore$ From (i) and (ii),

$$S_1^2 + S_2^2 = S_1(S_2 + S_3)$$

3. We have $\frac{a+b}{2} = 2\sqrt{ab}$

or, $\frac{a+b}{2\sqrt{ab}} = \frac{2}{1}$

By componendo and dividendo, we get

$$\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{a+b-2\sqrt{ab}} = \frac{2+1}{2-1}$$

or, $\frac{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + 2\sqrt{a}.\sqrt{b}}{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}.\sqrt{b}} = \frac{3}{1}$

or, $\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2} = \frac{3}{1}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{3}}{1}$$

Again, by componendo and dividendo, we get

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

or, $\frac{2\sqrt{a}}{2\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

or, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

on squaring both sides, we get

$$\frac{a}{b} = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)^2$$

or, $\frac{a}{b} = \frac{(\sqrt{3})^2 + (1)^2 + 2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2 + (1)^2 - 2\sqrt{3}}$

or, $\frac{a}{b} = \frac{3+1+2\sqrt{3}}{3+1-2\sqrt{3}}$

or, $\frac{a}{b} = \frac{4+2\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}}$

or, $\frac{a}{b} = \frac{2(2+\sqrt{3})}{2(2-\sqrt{3})}$

$\Rightarrow$ $a:b = (2+\sqrt{3}):(2-\sqrt{3})$

Very Short Answer Type Questions
(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

1. दिया गया अनुक्रम है :- 1,4,16,64,.....

स्पष्टतः यह एक गुणोत्तर श्रेढ़ी है, जिसमें

a=1, r=4.

$\therefore$ $t_9 = ar^{9-1} = ar^8 = 1\times4^8 = 65,536.$

2. दी गई श्रेणी है, $3 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + ...$

यहाँ $r = \frac{-1}{3}$ तथा a=3.

$\therefore$ $t_{10} = ar^{10-1} = 3\left(\frac{-1}{3}\right)^9 = \frac{-1}{6561}$

$\therefore$ सार्व–अनुपात= $\frac{-1}{3}$ और 10वाँ पद = $\frac{-1}{6561}$

3. $\because$ x-2,x,x+3 G.P. में है।

$\therefore$ $x^2=(x-2)(x+3)$

$\therefore$ $x^2=x^2+x-6$

$\Rightarrow$ $x^2-x^2-x+6=0$

$\Rightarrow$ $-x+6=0$

$\Rightarrow$ $x=6$

4. $\because$ $t_4=27$ और $t_7=729$.

माना कि G.P. का प्रथम पद a तथा सार्व–अनुपात r है।

$\therefore$ $ar^3=27$ .....(i)

तथा $ar^6=729$ .....(ii)

(i) से (ii) को भाग देने पर

$\frac{ar^6}{ar^3} = \frac{729}{27} \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = 3.$

अतः (i) से, $a\times3^3=27 \Rightarrow a=1.$

$\therefore$ श्रेणी है :- 1+3+9+27+.....

5. $\because$ $1+2+2^2+.....+2^{n-1}=255$

$\therefore$ $\frac{1(2^n-1)}{2-1} = 255$

$\therefore \quad 2^n-1=255$

$\Rightarrow 2^n = 255+1=256$

$\Rightarrow 2^n = 2^8 \Rightarrow \quad n=8.$

6. $\because$ a, 2 और $\frac{1}{4}$ का G.M. है।

$\therefore \quad a=\sqrt{2\times\frac{1}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$

7. माना कि G.P. का प्रथम पद a तथा सार्व–अनुपात r है।

$\because \quad t_3=4$

$\because \quad ar^2=4 \quad .....(i)$

अब, प्रथम पाँच पदों का गुणनफल

$=a.ar.ar^2.ar^3.ar^4$

$=a^5r^{1+2+3+4}$

$=a^5.r^{10}=(ar^2)^5=(4)^5=1024.$

8. दी गई श्रेणी है $\frac{1}{27}+\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+.....$

यहाँ $\quad a=\frac{1}{27}$, r=3.

माना कि $\quad t_n=243$

$\therefore \quad \frac{1}{27}.3^{n-1}=243$

या $\quad \frac{1}{3^3}\times 3^{n-1}=243$

या $\quad 3^{n-1-3}=243$

$\Rightarrow \quad 3^{n-4}=3^5$

$\Rightarrow \quad n-4=5$

$\therefore \quad n=5+4=9$

अतः 9वाँ पद 243 है।

9. दिया गया G.P. है :- 8,4,2,....., $\frac{1}{1024}$

यहाँ $\quad a=8, \quad r=\frac{1}{2}, \quad t_n=\frac{1}{1024}$

$\therefore \quad 8\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{1024}$

या, $\quad 8\times\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{1024} \Rightarrow 2^3\times\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{1024}$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2^{n-1-3}}=\frac{1}{1024}$

$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

$\Rightarrow \quad n-4=10$

$\therefore \quad n=10+4=14$

अतः कुल पदों की संख्या = 14

$\therefore$ अंत से छठा पद = प्रारंभ से (14-6+1)=प्रारंभ से 9वाँ पद

$=8\left(\frac{1}{2}\right)^{9-1}=8\times\frac{1}{2^8}=\frac{1}{32}.$

<u>or</u>

दिया गया G.P. है 8,4,2,..... $\frac{1}{1024}$

यहाँ $l=\frac{1}{1024}$ तथा $r=\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{1}{r}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$

$\therefore$ अंत से 6ठा पद $=l\left(\frac{1}{r}\right)^{6-1}$

$=\frac{1}{1024}(2)^5=\frac{1}{1024}\times 32=\frac{1}{32}$

10. दिया गया G.P. है 3,6,12,24,.....

यहाँ $\quad a=3, \quad r=2, \quad n=8.$

$\therefore S_8=\frac{3(2^8-1)}{2-1}=3(2^8-1)=3\times(256-1)$

$=3\times255=765.$

11. दी गई श्रेणी है :- 2+6+18+54+.....+4374

यहाँ $\quad a=2, \quad r=3, \quad t_n=4374, S_n=?$

$\because \quad 4374=2.3^{n-1}$

$\therefore \quad \frac{4374}{2}=3^{n-1}$

$\therefore \quad 2187=3^{n-1}$

$\therefore \quad 3^7=3^{n-1}$

$\therefore \quad 7=n-1$

$\therefore \quad 7+1=n \Rightarrow n=8.$

$\therefore S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$

$=\frac{2(3^8-1)}{3-1}=\frac{2(3^8-1)}{2}$

$=3^8-1=6561-1=6560.$

12. दी गई G.P. है $1-a+a^2-a^3+.....+$ n पदों तक

यहाँ प्रथम पद=1, सार्व–अनुपात, r=-a.

$\therefore$ n पदों का योग $S_n=\frac{1[1-(-a)^n]}{1-(-a)}=\frac{1-(-a)^n}{1+a}$

$=\frac{1-(-1)^n.a^n}{1+a}$

13. $\sum_{n=1}^{8}5^n=5^1+5^2+5^3+.....+5^8.$

स्पष्टतः यह एक गुणोत्तर श्रेणी है, जिसमें a=5, r=5.

$S_8 = \frac{5(5^5-1)}{5-1} = \frac{5}{4}(5^5-1)$

$= \frac{5}{4}(3125-1) = \frac{5}{4} \times 3124$

$= 5 \times 781 = 3905$

14. यहाँ $\frac{a+b}{2} = 25$

$\therefore a+b=50$ .....(i)

पुनः, $\sqrt{ab} = 20 \Rightarrow ab=400$ .....(ii)

$\therefore a-b = \sqrt{(a+b)^2 - 4ab} = \sqrt{(50)^2 - 4 \times 400}$

$= \sqrt{2500-1600} = \sqrt{900} = 30$

$\therefore a-b=30$ .....(iii)

(i) तथा (iii) को हल करने पर, a=40 , b=10.

15. माना कि G.P. का प्रथम पद a तथा सार्व–अनुपात r है।

$\therefore \frac{a+ar+ar^2}{a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+ar^5} = \frac{125}{152}$

या, $\frac{\frac{a(r^3-1)}{r-1}}{\frac{a(r^6-1)}{r-1}} = \frac{125}{152}$

$\Rightarrow \frac{r^3-1}{r^6-1} = \frac{125}{152} \Rightarrow \frac{r^3-1}{(r^3+1)(r^3-1)} = \frac{125}{152}$

$\therefore \frac{1}{r^3+1} = \frac{125}{152} \Rightarrow 152 = 125r^3 + 125$

$\Rightarrow 27 = 125r^3$

$\Rightarrow r^3 = \frac{27}{125} = \left(\frac{3}{5}\right)^3$

$\therefore r = \frac{3}{5}$

Short Answer Type Questions
(लघु उत्तरीय प्रश्न)

1. माना कि गुणोत्तर श्रेढ़ी में तीन संख्याएँ $\frac{a}{r}$, a तथा ar हैं।

$\therefore \frac{a}{r} \times a \times ar = 216 \Rightarrow a^3 = 216$

$\therefore a = 6$

अब, $\frac{a}{r} + a + ar = 21$

$\therefore \frac{6}{r} + 6 + 6r = 21$

$\Rightarrow \frac{6}{r} + 6r = 15$

$\Rightarrow \frac{6+6r^2}{r} = 15 \Rightarrow 6 + 6r^2 = 15r$

or, $6r^2 - 15r + 6 = 0$

$\Rightarrow 2r^2 - 5r + 2 = 0$

$\Rightarrow 2r^2 - 4r - r + 2 = 0$

$\Rightarrow 2r(r-2) - 1(r-2) = 0$

$\Rightarrow (2r-1)(r-2) = 0$

$\Rightarrow r = \frac{1}{2}$ or, 2 .

यदि $r = \frac{1}{2}$, तो संख्याएँ होंगी $\frac{6}{\frac{1}{2}}, 6, 6 \times \frac{1}{2}$

अर्थात् 12 , 6 , 3

यदि r=2 , तो संख्याएँ होंगी $\frac{6}{2}, 6, 6 \times 2$

अर्थात् 3 , 6 , 12

अतः अभीष्ट संख्याएँ हैं :- 12,6,3 or 3,6,12.

2. माना कि सार्व–अनुपात r है।

चूँकि, a,b,c,d गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

$\therefore \frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c} = r$

$\therefore b=ar , c=br=ar^2 , d=cr=ar^3$

अब, L.H.S. $= (b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2$

$=(ar-ar^2)^2+(ar^2-a)^2+(ar^3-ar)^2$

$=a^2[(r-r^2)^2+(r^2-1)^2+(r^3-r)^2]$

$=a^2[r^2-2r^3+r^4+r^4-2r^2+1+r^6-2r^4+r^2]$

$=a^2[r^6-2r^3+1]$

$=a^2(1-r^3)^2=(a-ar^3)^2$

$=(a-d)^2=$R.H.S

3. माना कि 16 और $\frac{1}{4}$ के बीच पाँच गुणोत्तर माध्य g_1 , g_2 , g_3 , g_4 , g_5 हैं।

$\therefore 16 , g_1 , g_2 , g_3 , g_4 , g_5 , \frac{1}{4}$ G.P. में हैं।

माना कि r = सार्व–अनुपात.

$\therefore \frac{1}{4}$ = 7वाँ पद $= 16.r^{7-1} = 16.r^6$

$\therefore r^6 = \frac{1}{64} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \Rightarrow r = \frac{1}{2}$

$\therefore g_1 = ar = 16 \times \frac{1}{2} = 8$

$g_2 = ar^2 = 16 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4$

$g_3 = ar^3 = 16 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 2$

$g_4 = ar^4 = 16 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 1$

$g_5 = ar^5 = 16 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 16 \times \frac{1}{32} = \frac{1}{2}$

अतः अभीष्ट गुणोत्तर माध्य $8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}$ हैं।

4. माना कि $a^x = b^y = c^z = k$.

$\therefore \quad a = k^{\frac{1}{x}}, b = k^{\frac{1}{y}}$ and $c = k^{\frac{1}{z}}$

$\because$ a,b,c G.P. में हैं।

$\therefore \quad \frac{b}{a} = \frac{c}{b}$

$\therefore \frac{k^{\frac{1}{y}}}{k^{\frac{1}{x}}} = \frac{k^{\frac{1}{z}}}{k^{\frac{1}{y}}}$

$\Rightarrow k^{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}} = k^{\frac{1}{z}-\frac{1}{y}}$

$\Rightarrow \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{1}{z} - \frac{1}{y}$

$\therefore \frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ A.P. में हैं।

5. माना कि G.P. का प्रथम पद x तथा सार्व–अनुपात r है।

$\because$ (p+q)वाँ पद = a

$\therefore \quad xr^{p+q-1} = a$ .....(i)

पुनः (p-q)वाँ पद= b

$\therefore \quad xr^{p-q-1} = b$ .....(ii)

(i) तथा (ii) को गुणा करने पर,

$x.r^{p+q-1}.\, xr^{p-q-1} = ab$

या, $x^2r^{p+q-1+p-q-1} = ab$

या, $x^2r^{2p-2} = ab$

या, $(xr^{p-1})^2 = ab$

$\therefore \quad xr^{p-1} = \sqrt{ab}$

अतः pवाँ पद= $\sqrt{ab}$

6. माना कि G.P. का प्रथम पद a तथा सार्व–अनुपात r है।

$\because \quad t_5 = p$

$\therefore \quad ar^4 = p$ .....(i)

पुनः, $t_8 = q$

$\therefore \quad ar^7 = q$ .....(ii)

तथा $t_{11} = s$

$\therefore \quad ar^{10} = s$ .....(iii)

अब (i) तथा (iii) को गुणा करने पर,

$ar^4.ar^{10} = ps$

$\therefore \quad a^2r^{14} = ps$

या, $(ar^7)^2 = ps$

$\Rightarrow \quad q^2 = ps$ ((ii) से $q = ar^7$)

अतः $q^2 = ps$.

7. माना कि G.P. का सार्व–अनुपात r है।

$\therefore \quad -3.r^3 = (-3r)^2$

या, $-3r^3 = 9r^2$

$\therefore \quad \frac{r^3}{r^2} = \frac{9}{-3} \Rightarrow r = -3$

$\therefore$ 7वाँ पद= $(-3)(-3)^{7-1} = (-3)^7 = -2187$.

8. $\sum_{k=1}^{11}(2+3^k) = \sum_{k=1}^{11} 2 + \sum_{k=1}^{11} 3^k$

$= 11\times2+(3^1+3^2+3^3+.....+3^{11})$

$= 22 + \frac{3(3^{11}-1)}{3-1} = 22 + \frac{3(3^{11}-1)}{2}$

$= \frac{44+3^{12}-3}{2} = \frac{3^{12}+41}{2}$

9. माना कि G.P. का प्रथम पद a तथा सार्व–अनुपात r है।

$\because \quad t_4 = x$

$\therefore \quad ar^3 = x$ .....(i)

पुनः, $t_{10} = y \Rightarrow ar^9 = y$ .....(ii)

तथा $t_{16} = z \Rightarrow ar^{15} = z$ .....(iii)

(i) तथा (iii) को गुणा करने पर,

$ar^3.ar^{15} = xz$

$\therefore \quad a^2r^{18} = xz$

या, $(ar^9)^2 = xz$

$\therefore \quad y^2 = xz$ ((ii) से $ar^9 = 4$)

$\Rightarrow$ x,y,z G.P. में हैं।

10. दी गई श्रेणी है :- 8+88+888+..... +n पदों तक

माना कि S=8+88+888+.....n पदों तक

=8[1+11+111+.....n पदों तक]

$= \frac{8}{9}$[9+99+999+.....n पदों तक]

$= \frac{8}{9}[(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+.....n$ पदों तक]

$= \frac{8}{9}[\{10+10^2+10^3+....n$ पदों तक$\}-\{1+1+1+...+n$ पदों तक$\}]$

$$= \frac{8}{9}\left[\frac{10(10^n-1)}{10-1}-n\right] = \frac{8}{9}\left[\frac{10(10^n-1)}{9}-n\right]$$

$$= \frac{8}{9}\left[\frac{10(10^n-1)-9n}{9}\right] = \frac{8}{81}[10^{n+1}-9n-10]$$

11. माना कि $S = 2\times128+4\times32+8\times8+16\times2+32\times\frac{1}{2}$

$= 256+128+64+32+16$

जो स्पष्टतः एक गुणोत्तर श्रेणी है।

यहाँ $a = 256$, $r = \frac{1}{2}$ तथा $n = 5$

$$\therefore \quad S = \frac{256\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right]}{1-\frac{1}{2}} = \frac{256\left[1-\frac{1}{32}\right]}{\frac{1}{2}}$$

$$= 256\times\frac{31}{32}\times\frac{2}{1} = 16\times31 = 496$$

Long Answer Type Questions
(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

1. माना कि G.P. है :- $a , ar , ar^2 , ar^3 , ...ar^{n-1}$.

$$\therefore \quad S = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad .....(i)$$

पुनः $P = a.ar.ar^2.ar^3.....ar^{n-1}$

$= a^n.r^{1+2+3+.....+(n-1)}$

$$\therefore \quad P = a^n.r^{\frac{n(n-1)}{2}} \quad .....(ii)$$

तथा $R = \frac{1}{a}+\frac{1}{ar}+\frac{1}{ar^2}+.....+\frac{1}{ar^{n-1}}$

स्पष्टतः यह एक G.P. है, जिसका प्रथम पद $= \frac{1}{a}$, तथा सार्व–अनुपात $\frac{1}{r}$ है।

$$\therefore R = \frac{\frac{1}{a}\left[\frac{1}{r^n}-1\right]}{\frac{1}{r}-1} = \frac{1}{a}.\frac{1-r^n}{r^n}.\frac{r}{1-r} \quad .....(iii)$$

(i) को (iii) से विभाजित करने पर,

$$\frac{S}{R} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}\times\frac{a.r^n(1-r)}{(1-r^n).r}$$

$$= a^2r^{n-1}$$

$$\therefore \left(\frac{S}{R}\right)^n = (a^2r^{n-1})^n = a^{2n}r^{n(n-1)}$$

$$= \left[a^n r^{\frac{n(n-1)}{2}}\right]^2 = P^2 \quad \text{(ii) से}$$

अतः $P^2 = \left(\frac{S}{R}\right)^n$

2. माना कि G.P. का प्रथम पद a तथा सार्व–अनुपात r है।

$$\therefore S_1 = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, S_2 = \frac{a(1-r^{2n})}{1-r}, S_3 = \frac{a(1-r^{3n})}{1-r}$$

अब, L.H.S. $= S_1^2 + S_2^2$

$$= \frac{a^2}{(1-r)^2}[(1-r^n)^2+(1-r^{2n})^2]$$

$$= \frac{a^2}{(1-r)^2}[1-2r^n+r^{2n}+1-2r^{2n}+r^{4n}]$$

$$= \frac{a^2}{(1-r)^2}(2-2r^n-r^{2n}+r^{4n}) \quad .....(i)$$

R.H.S. $= S_1(S_2+S_3)$

$$= \frac{a(1-r^n)}{1-r}\left[\frac{a(1-r^{2n})}{1-r}+\frac{a(1-r^{3n})}{1-r}\right]$$

$$= \frac{a^2}{(1-r)^2}[1-r^{2n}-r^n+r^{3n}+1-r^{3n}-r^n+r^{4n}]$$

$$= \frac{a^2}{(1-r)^2}(2-2r^n-r^{2n}+r^{4n}) \quad .....(ii)$$

$\therefore$ (i) तथा (ii) से,

$$S_1^2 + S_2^2 = S_1(S_2+S_3)$$

3. प्रश्न से, $\frac{a+b}{2} = 2\sqrt{ab}$

$$\therefore \quad \frac{a+b}{2\sqrt{ab}} = \frac{2}{1}$$

योगान्तर निष्पति से,

$$\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{a+b-2\sqrt{ab}} = \frac{2+1}{2-1}$$

या, $$\frac{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+2\sqrt{a}.\sqrt{b}}{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2-2\sqrt{a}.\sqrt{b}} = \frac{3}{1}$$

या, $$\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2} = \frac{3}{1}$$

या, $$\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{3}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{3}}{1}$$

पुनः, योगान्तर निष्पति से,

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

या, $$\frac{2\sqrt{a}}{2\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

या, $$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

दोनों तरफ वर्ग करने पर,

$$\frac{a}{b}=\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)^2$$

$$\therefore \quad \frac{a}{b}=\frac{(\sqrt{3})^2+(1)^2+2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2+(1)^2-2\sqrt{3}}$$

$$\therefore \quad \frac{a}{b}=\frac{3+1+2\sqrt{3}}{3+1-2\sqrt{3}}$$

$$\therefore \quad \frac{a}{b}=\frac{4+2\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}}$$

$$\therefore \quad \frac{a}{b}=\frac{2(2+\sqrt{3})}{2(2-\sqrt{3})} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$

$\Rightarrow$ $a:b=(2+\sqrt{3}):(2-\sqrt{3})$. Proved