CHAPTER - 6	System of Particles and Rotational Motion कणों के निकाय तथा घूर्णी गति

Centre of Mass :-

Centre of mass of a body is a point where the entire mass of the body can be supposed to be concentrated.It is a point that moves as though all the mass were concentrated there and all external forces were applied there.

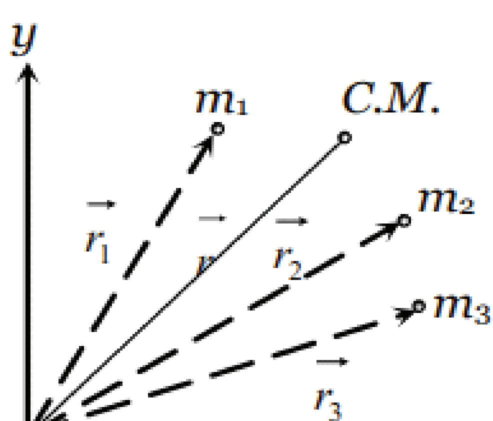
द्रव्यमान केंद्र:-

किसी पिंड का द्रव्यमान केंद्र वह बिंदु है जहां पिंड का संपूर्ण द्रव्यमान केंद्रित माना जा सकता है| यह एक बिंदु है जो इस प्रकार गति करता है मानो सम्पूर्ण द्रव्यमान वहीं केंद्रित हो गया हो और सभी बाहरी बल वहीं लागू हो गई हों|

Important points about centre of mass :-

(i) Position vector of centre of mass for n particle system :-

If a system consists of n particles of masses m_1 m_2, m_3.........m_n whose positions vectors are $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$..........$\vec{r}_n$ respectively then position vector of centre of mass is given by-



$$\vec{r} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots m_n}$$

(ii) Position vector of centre of mass for two particle system :-

$$\vec{r} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

(iii) The position of the centre of mass is independent of the coordinate system chosen.

(iv) The position of the centre of mass depends upon the shape of the body and distribution of mass.

(v) In symmetrical bodies in which the distribution of mass is homogenous, the centre of mass coincides with the geometrical centre or centre of symmetry of the body.

(vi) If the origin is at the centre of mass, then-

i.e. $\sum m_i \vec{r}_i = 0$

(vii) If a system of particles of masses m_1 m_2, m_3.........m_n move with velocities $\vec{v}_1$ $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$.........$\vec{v}_n$ then the velocity of centre of mass-

$$\vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \ldots\ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots\ldots}\right)$$

$$\vec{v}_{cm} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i}$$

(viii) If a system of particles of masses m_1 m_2, m_3.........m_n move with accelerations $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \ldots\ldots \vec{a}_n$ then the acceleration of centre of mass-

$$\vec{A}_{cm} = \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots\ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots\ldots}\right)$$

$$\vec{A}_{cm} = \frac{\sum m_i \vec{a}_i}{\sum m_i}$$

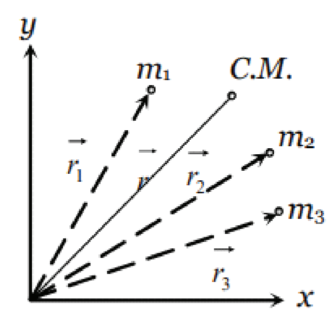
(ix) Position of centre of mass for different bodies

S. No.	Body	Position of centre of mass
(a)	Uniform hollow sphere	Centre of sphere
(b)	Uniform solid sphere	Centre of sphere
(c)	Uniform circular ring	Centre of ring
(d)	Uniform circular disc	Centre of disc
(e)	Uniform rod	Centre of rod
(f)	A plane lamina (Square, Rectangle, Parallelogram)	Point of inter section of diagonals
(g)	Triangular plane lamina	Point of inter section of medians
(h)	Rectangular or cubical block	Points of inter section of diagonals
(i)	Hollow cylinder	Middle point of the axis of cylinder
(j)	Solid cylinder	Middle point of the axis of cylinder
(k)	Cone or pyramid	On the axis of the cone at point distance $\frac{3h}{4}$ from the vertex where h is the height of cone

द्रव्यमान केन्द्र के बारे में महत्वपूर्ण बातें :-

(i) n कण प्रणाली के लिए द्रव्यमान केंद्र की स्थिति सदिश :-

यदि एक निकाय में m_1 m_2, m_3.........m_n द्रव्यमान के n कण हैं जिनके स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3..........\vec{r}_n$ हो तो द्रव्यमान केंद्र की स्थिति सदिश को इस प्रकार ब्यक्त करते हैं-



$$\vec{r} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + ...m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + m_3 + ...m_n}$$

(ii) दो कण निकाय के लिए द्रव्यमान केंद्र की स्थिति सदिश :-

$$\vec{r} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

(iii) द्रव्यमान केंद्र की स्थिति चुनी गई संदर्भ -फ्रेम (निर्देशांक निकाय) से स्वतंत्र होता है।

(iv)द्रव्यमान केंद्र की स्थिति पिंड के आकार और द्रव्यमान के वितरण पर निर्भर करती है।

(v) सममितीय पिंडो में जिनमें द्रव्यमान का वितरण समरूप होता है, उनमें द्रव्यमान केंद्र पिंड के ज्यामितीय केंद्र या समरूपता केंद्र के साथ मेल खाता है।

(vi) यदि मूल बिंदु द्रव्यमान केंद्र पर हो तो-

$$\Sigma m_i \vec{r}_i = 0$$

(vii) यदि निकाय में m_1 m_2, m_3.........m_n द्रव्यमान के n कण हैं जिनके वेग क्रमशः $\vec{v}_1$ $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$.........$\vec{v}_n$ हो तो द्रव्यमान केंद्र का वेग-

$$\vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + ...}{m_1 + m_2 + m_3 + ...}\right)$$

$$\vec{v}_{cm} = \frac{\Sigma m_i\vec{v}_i}{\Sigma m_i}$$

(viii) यदि निकाय में m_1 m_2, m_3.........m_n द्रव्यमान के n कण हैं जिनके त्वरण क्रमशः $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 .....\vec{a}_n$ हो तो द्रव्यमान केंद्र का त्वरण -

$$\vec{A}_{cm} = \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + ...}{m_1 + m_2 + m_3 + ...}\right)$$

$$\vec{A}_{cm} = \frac{\Sigma m_i\vec{a}_i}{\Sigma m_i}$$

(ix) विभिन्न पिंडों के द्रव्यमान केंद्र की स्थिति-

क्रम संख्या	पिंड	द्रव्यमान केंद्र की स्थिति
(a)	एकसमान खोखला गोला	गोले का केंद्र
(b)	एकसमान ठोस गोला	गोले का केंद्र
(c)	एकसमान गोलाकार वलय	वलय का केंद्र
(d)	एकसमान गोलाकार डिस्क	डिस्क का केंद्र
(e)	एकसमान छड़	छड़ का केंद्र
(f)	एक समतल स्तरिका (वर्गाकार,आयताकार, समांतर चतुर्भुज)	विकर्ण का प्रतिच्छेदन बिंदु
(g)	त्रिकोणीय समतल स्तरिका	माध्यिका का प्रतिच्छेदन बिंदु
(h)	आयताकार घनाकार ब्लॉक	विकर्ण का प्रतिच्छेदन बिंदु
(i)	खोखला बेलन	बेलन की धुरी का मध्य बिंदु
(j)	ठोस बेलन	बेलन की धुरी का मध्य बिंदु
(k)	शंकु या पिरामिड	शंकु के अक्ष पर शीर्ष से $\frac{3h}{4}$ की दूरी पर एक बिंदु पर जहां h शंकु की ऊंचाई है।

Rigid Body:-

A body is said to be a rigid body, when it has perfectly definite shape and size. The distance between all points of particles of such a body do not change, while applying any force on it.

दृढ़ पिंड :-

किसी पिंड को दृढ़ पिंड तब कहा जाता है, जब उसका आकृति और परिमाप बिल्कुल निश्चित हो। ऐसे पिंड पर कोई भी बल लगाने पर उसके सभी कणों के बीच की दूरी नहीं बदलती है।

Translational Motion:-

A rigid body performs a pure translational motion, if each particle of the body undergoes the same displacement in the same direction in a given interval of time.

स्थानांतरण गति:-

एक दृढ़ पिंड शुद्ध स्थानांतरण गति करता है, यदि पिंड का प्रत्येक कण एक निश्चित समय अंतराल में एक ही दिशा में समान विस्थापन पूरा करता है।

Rotational Motion:-

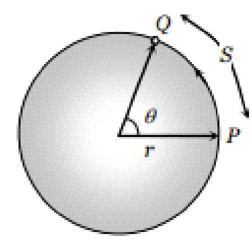
A rigid body performs a pure rotational motion, if each particle of the body moves in a circle, and the centre of all the circles lie on a straight line called the axes of rotation. Example: Rotation of ceiling fan,Rotation of blades of a windmill.

घूर्णन गति:-

एक दृढ़ पिंड शुद्ध घूर्णन गति करता है, यदि पिंड का प्रत्येक कण एक वृत्त में गति करता है, और सभी वृत्तों का केंद्र एक सीधी रेखा पर स्थित होता है जिसे घूर्णन की धुरी कहा जाता है।उदाहरण: छत के पंखे का घूमना, पवनचक्की के ब्लेड का घूमना।

Angular Displacement:-

It is the angle described by the position vector $\vec{r}$ about the axis of rotation.

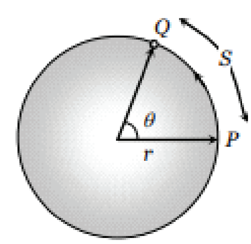


Angular displacement $(\theta) = \frac{\text{Linear displacement } (s)}{\text{radius } (r)}$

Its unit is radian and Dimension formula is $[M^0L^0T^0]$.

कोणीय विस्थापन:-

यह स्थिति सदिश $\vec{r}$ द्वारा घूर्णन अक्ष पर वर्णित कोण है।

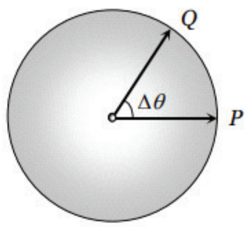


कोणीय विस्थापन $(\theta) = \frac{\text{रैखिक विस्थापन } (s)}{\text{त्रिज्या } (r)}$

इसका मात्रक रेडियन और विमीय सूत्र $[M^0L^0T^0]$ होता है।

Angular Velocity:-

The angular displacement per unit time is called angular velocity. If a particle moves from P to Q in time Δt then $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta T}$, where $\Delta\theta$ is the angular displacement.



- Instantaneous angular velocity -

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

- Average angular velocity-

$$\omega_{av} = \frac{\text{total angular displacement}}{\text{total time}} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1}$$

- Its S.I. unit is radian/sec and its dimensional formula is $[M^0L^0T^{-1}]$.
- Relation between Linear velocity and Angular velocity-

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

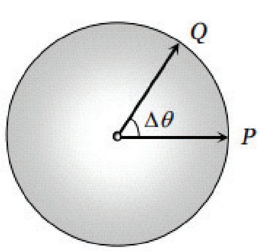
where $\vec{v}$ = linear velocity,

$\vec{r}$ = radius vector

$\vec{\omega}$ =Angular velocity is an axial vector, whose direction is normal to the rotational plane.

कोणीय वेग:-

प्रति इकाई समय के कोणीय विस्थापन को कोणीय वेग कहा जाता है।यदि कोई कण Δt समय में P से Q की ओर गति करता है तो $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta T}$ होगा $\Delta\theta$ जहाँ कोणीय विस्थापन है।



- तात्क्षणिक कोणीय वेग -

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

- औसत कोणीय वेग-

$$\omega_{av} = \frac{\text{कुल कोणीय विस्थापन}}{\text{कुल समय}} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1}$$

- इसकी S.I. मात्रक रेडियन/सेकंड और इसका विमीय सूत्र $[M^0L^0T^{-1}]$ होता है।

4.रैखिक वेग और कोणीय वेग के बीच संबंध-

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

जहाँ $\vec{v}$ = रैखिक वेग,

$\vec{r}$ = त्रिज्या सदिश

$\vec{\omega}$ = कोणीय वेग एक अक्षीय सदिश है, जिसकी दिशा घूर्णनशील तल के लम्बवत होती है।

Angular Acceleration:-

The rate of change of angular velocity is defined as angular acceleration.If particle has angular velocity ω_1 at time t_1 and angular velocity ω_2 at time t_2 then,

Angular acceleration -

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1}{t_2 - t_1}$$

(1) Instantaneous angular acceleration-

$$\vec{\alpha} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\theta}}{dt^2}.$$

(2) Average angular acceleration

$$\alpha_{av} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1}$$

(3) Its S.I. unit is radian/sec^2 and its dimensional formula is $[M^0L^0T^{-2}]$

(4) If α = 0 then circular or rotational motion is said to be uniform.

(5) Relation between angular acceleration and linear acceleration-

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r}$$

(6) It is an axial vector whose direction is along the change in direction of angular velocity i.e. normal to the rotational plane, outward or inward along the axis of rotation (depends upon the sense of rotation).

कोणीय त्वरण:-

कोणीय वेग में परिवर्तन की दर को कोणीय त्वरण के रूप में परिभाषित किया जाता है। यदि एक कण का

कोणीय वेग समय t_1 पर ω_1 और समय t_2 पर कोणीय वेग ω_2 हो , तो कोणीय त्वरण-

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1}{t_2 - t_1}$$

(1) तात्क्षणिक कोणीय त्वरण-

$$\vec{\alpha} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\theta}}{dt^2}.$$

(2) औसत कोणीय त्वरण-

$$\alpha_{av} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1}$$

(3) इसकी SI मात्रक रेडियन/सेकंड^2 और इसका विमीय सूत्र $[M^0L^0T^{-2}]$ होता है।

(4) यदि α = 0 तब वृतीय या घूर्णी गति को एकसमान कहा जाता है।

(5) कोणीय त्वरण और रैखिक त्वरण के बीच संबंध-

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r}$$

(6) यह एक अक्षीय सदिश है जिसकी दिशा कोणीय वेग के परिवर्तन के दिशा में होती है यानी घूर्णन की धूरी के बाहर या अंदर की ओर (घूर्णन की दिशा पर निर्भर करता है) घूर्णनशील सतह के लम्बवत होती है ।

Equations of Linear Motion and Rotational Motion:-

Linear Motion	Rotational Motion
If linear acceleration a=0 then u = Constant and s = u t.	If angular acceleration α = 0 then ω = Constant and $\theta = \omega t$
If linear acceleration a = constant, then-	If angular acceleration α = constant then-
i) $s = \frac{(u+v)}{2}t$	(i) $\theta = \frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}t$
ii) $a = \frac{v-u}{t}$	(ii) $\alpha = \frac{\omega_2-\omega_1}{t}$
iii) $v = u + at$	(iii) $\omega_2 = \omega_1 + \alpha t$
iv) $s = ut + \frac{1}{2}at^2$	(iv) $\theta = \omega_1 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
v) $v^2 = u^2 + 2as$	(v) $\omega_2^2 = \omega_1^2 + 2\alpha\theta$
vi) $s_{nth} = u + \frac{1}{2}a(2n-1)$	(vi) $\theta_{nth} = \omega_1 + (2n-1)\frac{\alpha}{2}$
If linear acceleration is not constant, then the above equation will not be applicable. In this case	If angular acceleration is not constant, then the above equation will not be applicable. In this case
(i) $v = \frac{dx}{dt}$	(i) $\omega = \frac{d\theta}{dt}$
(ii) $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$	(ii) $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$
(iii) $vdv = a\,ds$	(iii) $\omega d\omega = \alpha\, d\theta$

रैखिक गति और घूर्णी गति के समीकरण-

रेखीय गति	घूर्णी गति
यदि रैखिक त्वरण a=0 हो तो , u = अचर और s = ut होगा ।	यदि कोणीय त्वरण α = 0 हो, तब ω = अचर और $\theta = \omega t$ होगा ।
यदि रैखिक त्वरण α = अचर, हो तो-	यदि कोणीय त्वरण α = अचर, हो तो-
(i) $s = \frac{(u+v)}{2}t$	(i) $\theta = \frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}t$
(ii) $a = \frac{v-u}{t}$	(ii) $\alpha = \frac{\omega_2-\omega_1}{t}$
(iii) $v = u + at$	(iii) $\omega_2 = \omega_1 + \alpha t$
(iv) $s = ut + \frac{1}{2}at^2$	(iv) $\theta = \omega_1 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
(v) $v^2 = u^2 + 2as$	(v) $\omega_2^2 = \omega_1^2 + 2\alpha\theta$
(vi) $s_{nth} = u + \frac{1}{2}a(2n-1)$	(vi) $\theta_{nth} = \omega_1 + (2n-1)\frac{\alpha}{2}$
यदि रेखीय त्वरण अचर नहीं हो , तो उपरोक्त समीकरण लागू नहीं होगा। इस मामले में-	यदि कोणीय त्वरण अचर नहीं हो, तो उपरोक्त समीकरण लागू नहीं होगा। इस मामले में-
(i) $v = \frac{dx}{dt}$	(i) $\omega = \frac{d\theta}{dt}$
(ii) $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$	(ii) $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$
(iii) $vdv = a\,ds$	(iii) $\omega d\omega = \alpha\, d\theta$

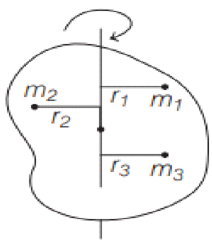
Moment of Inertia:-

Moment of inertia is the property of an object by virtue of which it opposes any change in its state of rest or of uniform rotation about an axis. It plays the same role in rotational motion as mass plays in linear motion.

Important points-

(1) Moment of inertia of a particle I = mr^2; where r is the perpendicular distance of a particle from the rotational axis.

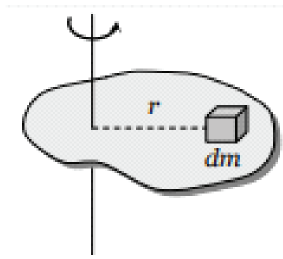
(2) The moment of inertia of a body about a given axis is equal to the sum of the products of the masses of its constituent particles and the square of their respective distances from the axis of rotation.



Axis of rotation

$$I=m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2+\ldots+m_nr_n^2= \sum_{i=1}^{i=n} m_i\, r_i^2$$

(3) Moment of inertia of a continuous distribution of mass-



Moment of inertia of a mass dm located at a perpendicular distance r from the axis of rotation- $dI = dm\ r^2$

⇒Moment of inertia of the entire body

$$I = \int r^2 dm$$

(4) Its S.I. unit is kgm^2 and its dimensional formula is $[ML^2]$.

(5) The moment of inertia of a body depends upon

- position of the axis of rotation.
- orientation of the axis of rotation.
- shape and size of the body.
- distribution of mass of the body about the axis of rotation.

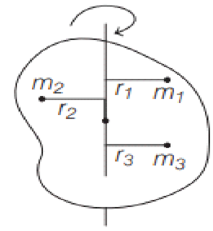
जड़त्व आघूर्ण:-

जड़त्व आघूर्ण किसी वस्तु का वह गुण है जिसके आधार पर वह किसी अक्ष के चारों ओर विराम की स्थिति या एकसमान घूर्णन की स्थिति में किसी भी परिवर्तन का विरोध करता है। यह घूर्णन गति में वही भूमिका निभाता है जो द्रव्यमान रैखिक गति में निभाता है।

महत्वपूर्ण बिंदु-

(1) किसी कण का जड़त्व आघूर्ण I = mr^2 होगा, जहाँ r घूर्णन अक्ष से कण की लंबवत दूरी है।

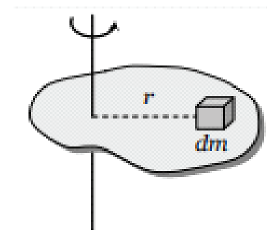
(2) किसी दिए गए अक्ष के परितः किसी पिंड का जड़त्व आघूर्ण उसके घटक कणों के द्रव्यमान और घूर्णन अक्ष से उनकी संबंधित दूरी के वर्ग के गुणनफल बराबर होता है।



Axis of rotation

$$I=m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2+\ldots+m_nr_n^2= \sum_{i=1}^{i=n} m_i\, r_i^2$$

(3) द्रव्यमान के निरंतर वितरण की स्थिति में -



घूर्णन अक्ष से लम्बवत r दुरी पर स्थित द्रव्यमान dm का जड़त्व आघूर्ण- $dI = dm\ r^2$

⇒सम्पूर्ण पिंड का जड़त्व आघूर्ण-

$$I = \int r^2 dm$$

(4) इसका S.I. मात्रक kgm^2 और इसका विमीय सूत्र $[ML^2]$ होता है|

(5) किसी पिंड का जड़त्व आघूर्ण निर्भर करता है-

- घूर्णन अक्ष की स्थिति (दुरी)
- घूर्णन अक्ष का अभिविन्यास (दिशा)
- पिंड का आकृति और परिमाप
- घूर्णन अक्ष के परितः पिंड के द्रव्यमान का वितरण

Radius of gyration (K):-

It is defined as the distance of a point from the axis of rotation at which, if the whole mass of the body were concentrated, the moment of inertia of the body would be the same as with the actual distribution of mass of the body.

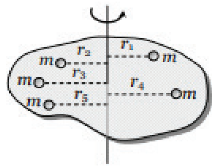
Important points:-

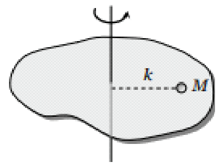
- Moment of inertia of a body about a given axis is equal to the product of mass of the body and squares of its radius of gyration about that axis i.e.

$$I = Mk^2 \Rightarrow k = \sqrt{\frac{I}{M}}$$

where k is called the radius of gyration.

- The radius of gyration of a body about a given axis is equal to the root mean square distance of the constituent particles of the body from the given axis.





From the formula of discrete distribution

$$I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + \text{..........} + m_nr_n^2$$

If, $m_1 = m_2 = m_3 = \text{.......} = m$ then

$$I = m(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \text{......}r_n^2) \quad \text{.......(i)}$$

From the definition of Radius of gyration,

$$I = Mk^2 \qquad \text{..................(ii)}$$

By equating (i) and (ii) we get-

$$Mk^2 = m(r^2_1 + r^2_2 + r^2_3 + \text{......}r^2_n) \; [\text{As } M = nm]$$

$$\Rightarrow nmk^2 = m(r^2_1 + r^2_2 + r^2_3 + \text{......}r^2_n)$$

$$\Rightarrow k = \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^3 + \text{...........} + r_n^2}{n}}$$

- Radius of gyration (k) depends on shape and size of the body, position and configuration of the axis of rotation, distribution of mass of the body w.r.t. the axis of rotation.
- Radius of gyration (k) does not depend on the mass of the body.
- Its S.I. unit is m and its dimensional formula is $[M^0L^1T^0]$.

परिभ्रमण त्रिज्या (K):-

इसे घूर्णन अक्ष से उस बिंदु की दूरी के रूप में परिभाषित किया जाता है जिस पर पिंड का सम्पूर्ण द्रव्यमान केंद्रित हो तो उसके जड़त्व आघूर्ण का वही मान प्राप्त होगा जो पिंड के द्रव्यमान के वास्तविक वितरण के कारण है।

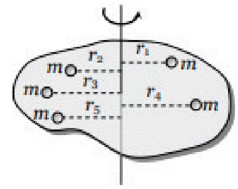
महत्वपूर्ण बिंदु:-

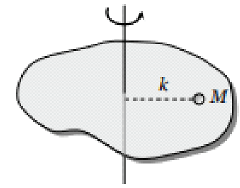
- किसी दिए गए अक्ष के परितः किसी पिंड का जड़त्व आघूर्ण पिंड के द्रव्यमान और परिभ्रमण त्रिज्या के वर्गों के गुणनफल के बराबर होता है।

$$I = Mk^2 = k = \sqrt{\frac{I}{M}}$$

जहाँ k को परिभ्रमण त्रिज्या कहा जाता है।

- दिए गए अक्ष के परितः किसी पिंड की परिभ्रमण त्रिज्या दिए गए अक्ष से पिंड के घटक कणों की वर्गमूल माध्य वर्ग दूरी (root mean square) के बराबर होती है।





असंतत वितरण के सूत्र से

$$I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + \text{..........} + m_nr_n^2$$

यदि, $m_1 = m_2 = m_3 = \text{.......} = m$ हो तो

$$I = m(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \text{......}r_n^2) \quad \text{.......(i)}$$

परिभ्रमण त्रिज्या की परिभाषा से,

$$I = Mk^2 \qquad \text{..................(ii)}$$

समीकरण (i) और (ii) को बराबर करने पर

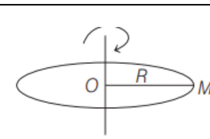
$$Mk^2 = m(r^2_1 + r^2_2 + r^2_3 + \text{......}r^2_n) \; [\text{As } M = nm]$$

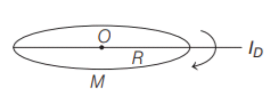
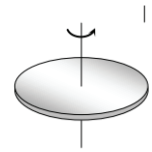
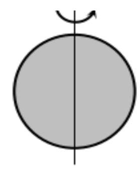
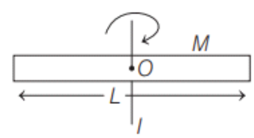
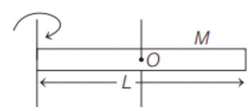
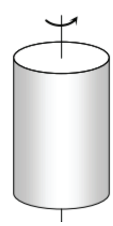
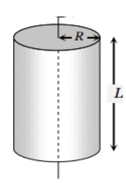
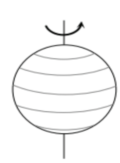
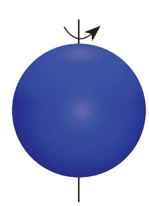
$$\Rightarrow nmk^2 = m(r^2_1 + r^2_2 + r^2_3 + \text{......}r^2_n)$$

$$\Rightarrow k = \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^3 + \text{...........} + r_n^2}{n}}$$

- परिभ्रमण त्रिज्या (k) पिंड के आकार और परिमाप, घूर्णन अक्ष की स्थिति और विन्यास, घूर्णन अक्ष से पिंड में द्रव्यमान के वितरण पर निर्भर करती है।
- परिभ्रमण त्रिज्या (k) पिंड के द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करती है।
- इसकी S.I. मात्रक m और इसका विमीय सूत्र $[M^0L^1T^0]$ होता है |

Moment of inertia of a few bodies of regular shapes
नियमित आकार के कुछ पिंडों का जड़त्व आघूर्ण

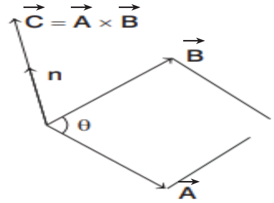
Body (पिंड)	Axis of Rotation (घूर्णन अक्ष)	Figure (चित्र)	Moment of inertia (जड़त्व आघूर्ण)
Thin Circular Ring (पतली वृताकार वलय)	About an axis passing through its centre and perpendicular to its plane एक अक्ष के परितः जो इसके केंद्र से होकर गुजरता है और इसके तल पर लंबवत है |		$I = MR^2$

Thin Circular Ring (पतली वृताकार वलय	About a diameter व्यास के परितः		$I_D = \frac{1}{2} MR^2$
Circular Disc (वृत्ताकार डिस्क)	About an axis passing through its centre and perpendicular to its plane एक अक्ष के परितः जो इसके केंद्र से होकर गुजरता है और इसके तल पर लंबवत है |		$I = \frac{1}{2} MR^2$
Circular Disc (वृत्ताकार डिस्क)	About a diameter व्यास के परितः		$I = \frac{1}{4} MR^2$
Thin Rod (पतला छड़)	About an axis passing through its centre and perpendicular to its length एक अक्ष के परितः जो इसके केंद्र से गुजरे और इसकी लंबाई के लंबवत हो |		$I = \frac{1}{12} ML^2$
Thin Rod (पतला छड़)	About an axis passing through its one end and perpendicular to its length एक अक्ष के परितः जो इसके इसके एक सिरे से गुजरे और इसकी लंबाई के लंबवत हो |		$I = \frac{1}{3} ML^2$
Cylindrical shell (खोखला बेलन)	About its own axis अपने अक्ष के परितः		$I = MR^2$
Solid cylinder (ठोस बेलन)	About its own axis अपने अक्ष के परितः		$I = \frac{1}{2} MR^2$
Spherical shell (खोखला गोला)	About its diametric axis अपने व्यासीय अक्ष के परितः		$I = \frac{2}{3} MR^2$
Solid Sphere (ठोस गोला)	About its diametric axis अपने व्यासीय अक्ष के परितः		$I = \frac{2}{5} MR^2$

Vector or Cross Product of Two Vectors:-

The vector product of two vectors is equal to the product of their magnitudes and the sine of the smaller angle between them. It is denoted by x (cross)

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin\theta \ \hat{n}$$

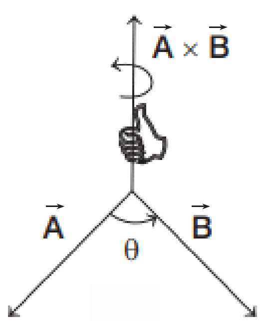


Direction of Vector Cross Product :-

When $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$, the direction of $\vec{C}$ is at right angles to the plane containing the vectors $\vec{A}$ and $\vec{B}$. The direction is determined by the right hand thumb rule.

Right Hand Thumb Rule:-

Curl the fingers of your right hand from $\vec{A}$ to $\vec{B}$.Then, the direction of the thumb will point in the direction of $\vec{A} \times \vec{B}$.



Properties of Vector Product:-

(i) Vector product is not commutative.

i.e. $\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$ $\quad [\because (\vec{A} \times \vec{B}) = -(\vec{B} \times \vec{A})]$

(ii) Vector products are distributive.

i.e. $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$

(iii) Vector product of two parallel vectors is zero.

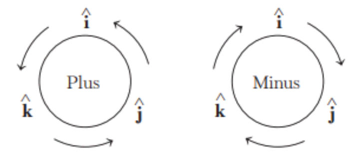
i.e. $\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin 0^\circ = 0$

(iv) Vector product of any vector with itself is zero.

$$\vec{A} \times \vec{A} = AA \sin 0^\circ = 0$$

(v) Vector product of orthogonal unit vectors

- $\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$
- $\hat{i} \times \hat{j} = -\hat{j} \times \hat{i} = \hat{k}$
- $\hat{j} \times \hat{k} = -\hat{k} \times \hat{j} = \hat{i}$
- $\hat{k} \times \hat{i} = -\hat{i} \times \hat{k} = \hat{j}$



(vi) Vector product in cartesian coordinates

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) \times (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

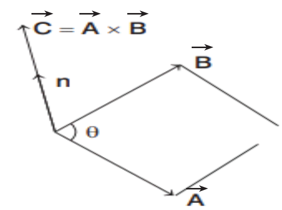
$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$= (A_yB_z - A_zB_y)\,\hat{i} - (A_xB_z - B_xA_z)\,\hat{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\,\hat{k}$$

दो सदिशों का सदिश या क्रॉस गुणनफल :-

दो सदिशों का सदिश गुणनफल उनके परिमाणों और उनके बीच के छोटे कोण की ज्या के गुणनफल के बराबर होता है। इसे (×) से दर्शाया जाता है|

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin\theta \ \hat{n}$$

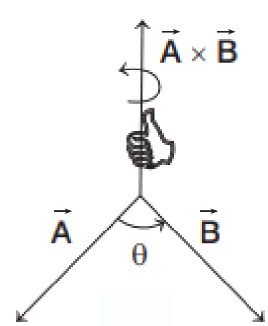


सदिश या क्रॉस गुणनफल की दिशा:-

जब $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ हो तो $\vec{C}$ की दिशा सदिश $\vec{A}$ और $\vec{B}$ के तल के समकोण पर होती है। जिसकी दिशा दाहिने हाथ के अंगूठे के नियम द्वारा निर्धारित की जाती है।

दाहिने हाथ के अंगूठे के नियम:-

अपने दाहिने हाथ की उंगलियों को $\vec{A}$ से $\vec{B}$ की ओर मोड़ें तो अंगूठे की दिशा $\vec{A} \times \vec{B}$ की दिशा को इंगित करेगा।



सदिश गुणनफल के गुण :-

(i) सदिश गुणनफल क्रम विनिमेय नहीं होते है।

i.e. $\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$ $\quad [\because (\vec{A} \times \vec{B}) = -(\vec{B} \times \vec{A})]$

(ii) सदिश गुणनफल वितरणात्मक (distributive) होते

हैं।

i.e. $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$

(iii) दो समान्तर सदिशों का सदिश गुणनफल शून्य होता है|

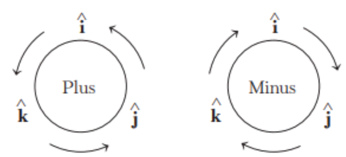
i.e. $\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin 0^\circ = 0$

(iv) किसी भी सदिश का स्वयं के साथ सदिश गुणनफल शून्य होता है|

$$\vec{A} \times \vec{A} = AA \sin 0^\circ = 0$$

(v) ऑर्थोगोनल इकाई सदिश का सदिश गुणनफल-

- $\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$
- $\hat{i} \times \hat{j} = -\hat{j} \times \hat{i} = \hat{k}$
- $\hat{j} \times \hat{k} = -\hat{k} \times \hat{j} = \hat{i}$
- $\hat{k} \times \hat{i} = -\hat{i} \times \hat{k} = \hat{j}$



(vi) कार्टेशियन निर्देशांक में सदिश गुणनफल-

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) \times (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

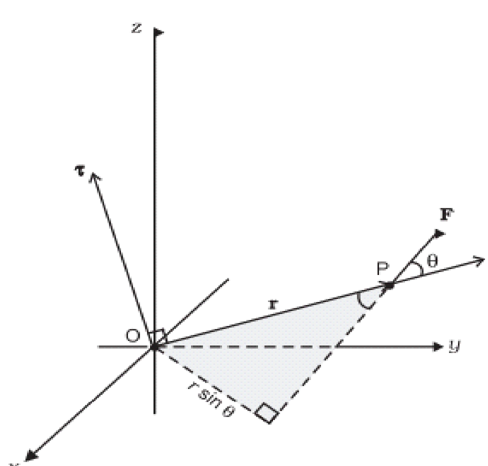
$$= (A_yB_z - A_zB_y)\,\hat{i} - (A_xB_z - B_xA_z)\,\hat{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\,\hat{k}$$

Torque:-

The turning effect of a force about the axis of rotation is called moment of force or torque due to the force.Torque or moment of a force about the axis of rotation

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = rF \sin\theta\, \hat{n}$$

Torque is an axial vector. i.e., its direction is always perpendicular to the plane containing vector $\vec{r}$ and $\vec{F}$ in accordance with the right hand thumb rule.



Important point-

- As τ = rFsinθ = F(rsinθ)=Fd

Where d = rsinθ = Perpendicular distance of line of action of force from the axis of rotation

i.e.

Torque = Force $\times$ (Perpendicular distance of line of action of force from the axis of rotation.)

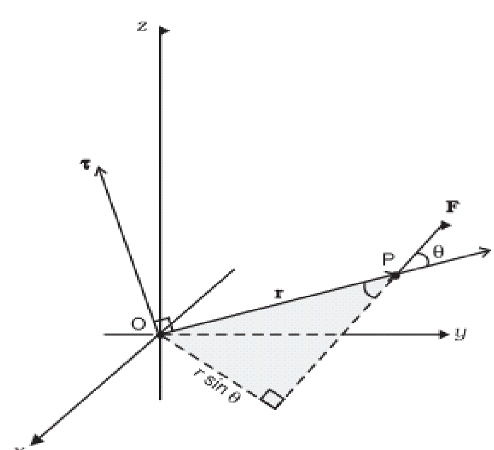
- Torque is also called moment of force and d is called moment or lever arm.
- For a given force and angle, magnitude of torque depends on r. The more is the value of r, the more will be the torque and easier to rotate the body.
- Its S.I. unit is N-m and its dimensional formula is $[ML^2T^{-2}]$
- If a body is acted upon by more than one force, the total torque is the vector sum o $\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 + ...$
- A body is said to be in rotational equilibrium if resultant torque acting on it is zero i.e. $\Sigma \vec{\tau} = 0$.
- Torque is the cause of rotational motion and it plays the same role as force plays in translatory motion i.e. torque is the rotational analogue of force.
- In rotational motion, torque, $\tau = I\alpha$ where, α is angular acceleration and I is the moment of inertia.

बल आघूर्ण :-

घूर्णन अक्ष के परितः किसी बल के घूमाने के प्रभाव को बल आघूर्ण कहा जाता है। घूर्णन अक्ष के परितः बल अ

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = rF \sin\theta\, \hat{n}$$

बल आघूर्ण एक अक्षीय सदिश है इसकी दिशा हमेशा सदिश $\vec{r}$ और F के तल के लंबवत होती है जिसे दाहिने हाथ के अंगूठे के नियम के अनुसार ब्यक्त किया जाता है।



महत्वपूर्ण बिंदु-

- जैसा τ = rFsinθ = F(rsinθ)=Fd

जहाँ d = rsinθ = घूर्णन अक्ष से बल की क्रिया रेखा की लंबवत दूरी है |

अर्थात,

बल आघूर्ण = बल $\times$ (घूर्णन अक्ष से बल की क्रिया रेखा की लंबवत दूरी)

- बल आघूर्ण (टॉर्क) को बल का आघूर्ण भी कहा जाता है और d को लीवर आर्म भी कहा जाता है।
- किसी दिए गए बल और कोण के लिए, बल आघूर्ण का परिमाण r पर निर्भर करता है। r का मान जितना अधिक होगा, बल आघूर्ण उतना ही अधिक होगा और पिंड को घुमाने में आसानी होगी।
- इसकी S.I. इकाई N-m होता है और इसका विमीय सूत्र [ML^2T^{-2}] होता है |
- यदि किसी पिंड पर एक से अधिक बल लगाए जाते हैं, तो कुल बलाघूर्ण प्रत्येक बलाघूर्ण का सदिश योग होता है।

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 + \ldots\ldots$$

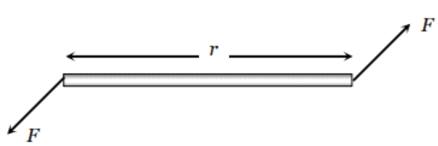
- किसी पिंड को घूर्णी संतुलन में कहा जाता है यदि उस पर कार्य करने वाला परिणामी बलाघूर्ण शून्य हो|

अर्थात, $\Sigma \vec{\tau} = 0$

- बलाघूर्ण (टॉर्क) घूर्णी गति का कारक है और यह वही भूमिका निभाता है जो बल रेखीय गति में निभाता है यानी बलाघूर्ण (टॉर्क) बल का घूर्णी अनुरूप है।
- घूर्णी गति में, बलाघूर्ण (टॉर्क), τ = Iα होता है जहाँ, α कोणीय त्वरण है और I जड़त्व आघूर्ण है।

Couple:-

- A pair of equal and opposite forces with parallel lines of action is called a couple. It produces rotation without translation.

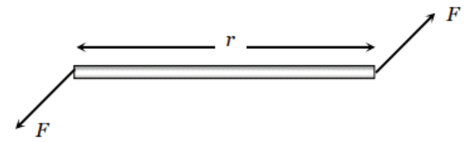


$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

- Generally both couple and torque carry equal meaning. The basic difference between torque and couple is the fact that in case of couple both the forces are externally applied while in case of torque one force is externally applied and the other is reactionary.

कपल:-

- समान और विपरीत क्रिया रेखाओं वाले बलों के युग्म को कपल कहा जाता है। यह बिना रेखीय गति के घूर्णन उत्पन्न करता है|

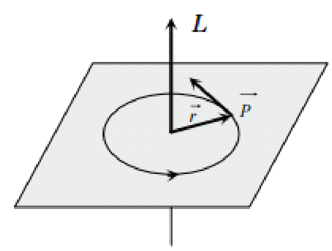


$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

- आम तौर पर कपल और बलाघूर्ण (टॉर्क) दोनों समान अर्थ रखते हैं।बलाघूर्ण (टॉर्क) और कपल के बीच बुनियादी अंतर यह है कि कपल के मामले में दोनों बल बाहरी रूप से लागू होते हैं जबकि बलाघूर्ण (टॉर्क) के मामले में एक बल बाहरी रूप से लगाया जाता है और दूसरा प्रतिक्रियाशील होता है।

Angular Momentum:-

The moment of linear momentum of a body with respect to any axis of rotation is known as angular momentum. If $\vec{P}$ is the linear momentum of a particle and $\vec{r}$ is its position vector from the point of rotation then angular momentum- $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$



Important point

- Its SI unit is J-s and its dimensional formula is [ML^2T^{-1}].
- It is the rotational analogue of linear momentum and is measured as the product of linear momentum and the perpendicular distance of its line of axis of rotation.
- Angular momentum is an axial vector i.e. always directed perpendicular to the plane of rotation and along the axis of rotation.
- In vector form, $\vec{L} = I\vec{\omega}$
- The rate of change of angular momentum is equal to the net torque acting on the particle.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\alpha} = \vec{\tau}$$

$$[\text{As } \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\alpha} \text{ and } \vec{\tau} = I\vec{\alpha}]$$

$$\Rightarrow \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

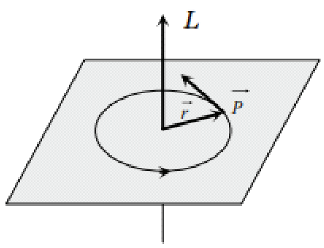
● The angular momentum of a system of particles is equal to the vector sum of angular momentum of each particle i.e.,

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + ... + \vec{L}_n$$

कोणीय संवेग :-

घूर्णन अक्ष के सापेक्ष में किसी पिंड के रैखिक संवेग के आघूर्ण को कोणीय संवेग के रूप में जाना जाता है। अगर P एक कण का रैखिक संवेग है और $\vec{r}$ घूर्णन के बिंदु से इसकी स्थिति सदिश हो तो कोणीय संवेग -

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$$



महत्वपूर्ण बिंदु-

● इसकी S.I. मात्रक J-s और इसका विमीय सूत्र $[ML^2T^{-1}]$ होता है |

● यह रैखिय संवेग का घूर्णी अनुरूप है और इसे रैखिक संवेग और घूर्णन अक्ष की रेखा से इसकी लंबवत दूरी के गुणनफल के रूप में मापा जाता है।

● कोणीय संवेग एक अक्षीय सदिश है, यह हमेशा घूर्णन के तल के लंबवत और घूर्णन अक्ष के अनुदिश निर्देशित होता है।

● सदिश रूप में, $\vec{L} = I\vec{\omega}$

● कोणीय संवेग में परिवर्तन की दर कण पर लगने वाले कुल बलाघूर्ण के बराबर होती है।

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\alpha} = \vec{\tau}$$

$$\left[\text{As } \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\alpha} \text{ and } \vec{\tau} = I\vec{\alpha}\right]$$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

● कणों की एक निकाय का कोणीय संवेग प्रत्येक कण के कोणीय संवेग के सदिश योग के बराबर होता है | अर्थात,

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + ... + \vec{L}_n$$

Angular impulse :-

If a large torque acts on a particle for a small time then 'angular impulse' of torque is given by

$$\vec{J} = \int \vec{\tau}\, dt = \vec{\tau}_{av} \int_{t_1}^{t_2} dt$$

$$\Rightarrow \quad \vec{J} = \vec{\tau}_{av}\, \Delta t = \Delta \vec{L}$$

i.e. Angular impulse = Change in angular momentum

कोणीय आवेग :-

यदि एक बड़ा बलाघूर्ण किसी कण पर थोड़े समय के लिए कार्य करता है तो बलाघूर्ण के 'कोणीय आवेग' को इस प्रकार से व्यक्त किया जाता है-

$$\vec{J} = \int \vec{\tau}\, dt = \vec{\tau}_{av} \int_{t_1}^{t_2} dt$$

$$\Rightarrow \quad \vec{J} = \vec{\tau}_{av}\, \Delta t = \Delta \vec{L}$$

अर्थात, कोणीय आवेग = कोणीय संवेग में परिवर्तन

Conservation of Angular Momentum:-

If the external torque acting on a system is zero, then its angular momentum remains conserved.

So if the net external torque on a particle (or system) is zero then

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + ... = \text{constant.}$$

As $\vec{L} = I\vec{\omega}$ so if $\vec{\tau} = 0$ then $I\omega$ = Constant

$$\therefore I \propto \frac{1}{\omega}$$

कोणीय संवेग का संरक्षण:-

यदि किसी निकाय पर कार्य करने वाला बाह्य बलाघूर्ण शून्य हो, तो उसका कोणीय संवेग संरक्षित रहता है।

इसलिए यदि किसी कण (या निकाय) पर शुद्ध बाहरी बलाघूर्ण शून्य हो तो

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + ... = \text{अचर}$$

जैसा की $\vec{L} = I\vec{\omega}$ तो यदि $\vec{\tau} = 0$ हो तो $I\omega$ = अचर

$$\therefore I \propto \frac{1}{\omega}$$

Work :

If the body is initially at rest and angular displacement is $d\theta$ due to torque then work done on the body- $W = \int \tau\, d\theta$

कार्य :

यदि पिंड प्रारंभ में विराम की स्थिति में हो और बलाघूर्ण के कारण पिंड का कोणीय विस्थापन dθ हो तो पिंड पर किया गया कार्य - $W = \int \tau \, d\theta$

Rotational Kinetic Energy:-

Rotational kinetic energy of a body is equal to the sum of kinetic energies of its constituent particles.

Rotational kinetic energy- $K = \frac{1}{2} I\omega^2$

घूर्णी गतिज ऊर्जा-

किसी पिंड की घूर्णी गतिज ऊर्जा उसके घटक कणों की गतिज ऊर्जाओं के योग के बराबर होती है।

घूर्णी गतिज ऊर्जा- $K = \frac{1}{2} I\omega^2$

Total kinetic energy of a perfectly rolling object

=Kinetic energy of translational + (Kinetic energy of rotation)

$$= \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I\omega^2$$

पूर्णतः लोटेनिक गति में पिंड की कुल गतिज ऊर्जा

= स्थानान्तरण की गतिज ऊर्जा + (घूर्णन की गतिज ऊर्जा)

$$= \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I\omega^2$$

Power :

Rate of change of kinetic energy is defined as power

$$P = \frac{d}{dt}(K_R) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} I\omega^2\right] = I\omega \frac{d\omega}{dt} = I\omega\alpha = I\alpha\omega = \tau\omega$$

In vector form Power (P) = $\vec{\tau} \cdot \vec{\omega}$

शक्ति:

गतिज ऊर्जा के परिवर्तन की दर को शक्ति के रूप में परिभाषित किया गया है|

$$P = \frac{d}{dt}(K_R) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} I\omega^2\right] = I\omega \frac{d\omega}{dt} = I\omega\alpha = I\alpha\omega = \tau\omega$$

सदिश संकेत में शक्ति (P) = $\vec{\tau} \cdot \vec{\omega}$

Equilibrium of Rigid Body:-

A rigid body is said to be in equilibrium, if both of its linear momentum and angular momentum are not changing with time. Thus, for equilibrium the body does not possess linear acceleration or angular acceleration.

For translational equilibrium of a rigid body,

$$\vec{F} = \sum_i F_i = 0$$

For rotational equilibrium of a rigid body,

$$\vec{\tau} = \sum_i \vec{\tau}_i = 0$$

दृढ़ पिंड का संतुलन:-

एक दृढ़ पिंड को संतुलन में कहा जाता है, यदि इसका रैखिय संवेग और कोणीय संवेग दोनों समय के साथ नहीं बदलते हैं। इस प्रकार, संतुलन के लिए पिंड में रैखिय त्वरण या कोणीय त्वरण नहीं होता है।

किसी दृढ़ पिंड के रेखीय संतुलन के लिए,

$$\vec{F} = \sum_i F_i = 0$$

किसी दृढ़ पिंड के घूर्णी संतुलन के लिए,

$$\vec{\tau} = \sum_i \vec{\tau}_i = 0$$

Centre of Gravity:-

If a body is supported on a point such that total gravitational torque about this point is zero, then this point is called the centre of gravity of the body.

गुरुत्व केंद्र:-

यदि किसी पिंड को किसी बिंदु पर इस प्रकार सहारा दिया जाय कि इस बिंदु के परितः कुल गुरुत्वाकर्षण बल का बलाघूर्ण शून्य हो , तो इस बिंदु को पिंड का गुरुत्व केंद्र कहा जाता है।

Analogy Between Translatory Motion and Rotational Motion.

Sl. no	Translatory Motion	Rotational Motion
1	Distance/displacement (s)	Angle or angular displacement (θ)
2	Linear velocity(v)=$\frac{ds}{dt}$	Angular velocity (w) = $\frac{d\theta}{dt}$
3	Linear acceleration (a) $= \frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}$	Angular acceleration(α) $= \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$
4	Mass (m)	Moment of inertia (I)
5	Linear momentum $\vec{P} = m\vec{v}$	Angular momentum $\vec{L} = I\vec{\omega}$
6	$\vec{F} = m\vec{a}$	$\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$
7	$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$	$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

8	**Translational KE,** $K_T = \frac{1}{2}mv^2$	**Rotational KE,** $K_R = \frac{1}{2}I\omega^2$
9	$W = \int \vec{F}.\vec{ds}$	$W = \int \vec{\tau}.\vec{d\theta}$
10.	$P = \vec{F}.\vec{v}$	$P = \vec{\tau}.\vec{\omega}$
11	Linear momentum of a system is conserved when no external force acts on the system	Angular momentum of a system is conserved when no external torque acts on the system
12	Equation of translatory motion- i. $v = u + at$ ii. $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ iii. $v^2 - u^2 = 2as$	Equation of rotational motion- i. $\omega_2 = \omega_1 + at$ ii. $\theta = \omega_1 t + \frac{1}{2}at^2$ iii. $\omega_2^2 - \omega_1^2 = 2a\theta$,

रेखीय गति और घूर्णी गति के बीच सादृश्य।

क्र. सं.	रेखीय गति	घूर्णी गति
1	दूरी/विस्थापन (s)	कोण या कोणीय विस्थापन (θ)
2	रैखिक वेग(v)=$\frac{ds}{dt}$	कोणीय वेग (ω) = $\frac{d\theta}{dt}$
3	रैखिक त्वरण (a)= $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}$	कोणीय त्वरण (α)= $\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$
4	द्रव्यमान (m)	जड़त्व आघूर्ण (*I*)
5	रेखीय संवेग $\vec{P} = m\vec{v}$	कोणीय संवेग $\vec{L} = I\vec{\omega}$
6	$\vec{F} = m\vec{a}$	$\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$
7	$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$	$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
8	रेखीय गतिज उर्जा- $K_T = \frac{1}{2}mv^2$	धुर्वीय गतिज उर्जा- $K_R = \frac{1}{2}I\omega^2$
9	$W = \int \vec{F}.\vec{ds}$	$W = \int \vec{\tau}.\vec{d\theta}$
10.	$P = \vec{F}.\vec{v}$	$P = \vec{\tau}.\vec{\omega}$
11	किसी निकाय का रैखिक संवेग संरक्षित रहता है जब निकाय पर कोई बाहरी बल कार्य नहीं करता है|	किसी निकाय का कोणीय संवेग संरक्षित रहता है जब निकाय पर कोई बाहरी बलाघूर्ण कार्य नहीं करता है|
12	रेखीय गति के लिय समीकरण- i. $v = u + at$ ii. $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ iii. $v^2 - u^2 = 2as$	कोणीय गति के लिय समीकरण- i. $\omega_2 = \omega_1 + at$ ii. $\theta = \omega_1 t + \frac{1}{2}at^2$ iii. $\omega_2^2 - \omega_1^2 = 2a\theta$,

MULTIPLE CHOICE QUESTIONS:
बहुविकल्पीय प्रश्न:

1. The angular velocity of seconds hand of a watch will be-

a. $\frac{\pi}{60}$ rad/sec b. $\frac{\pi}{30}$ rad/sec
c. 60π rad/sec d. 30π rad/sec

घड़ी की सेकंड सुई का कोणीय वेग क्या होगा ?

a. $\frac{\pi}{60}$ rad/sec b. $\frac{\pi}{30}$ rad/sec
c. 60π rad/sec d. 30π rad/sec

2. What is the dimensional formula of torque ?

a. $[ML^2T^{-1}]$ b. $[M^2LT^{-1}]$
c. $[MLT^{-2}]$ d. $[ML^2T^{-2}]$

बलाघूर्ण का विमीय सूत्र क्या होता है?

a. $[ML^2T^{-1}]$ b. $[M^2LT^{-1}]$
c. $[MLT^{-2}]$ d. $[ML^2T^{-2}]$

3. What is the dimensional formula of moment of inertia ?

a. $[ML^2T^0]$ b. $[M^2 LT^{-1}]$
c. $[MLT^{-2}]$ d. $[ML^2T^{-2}]$

जड़त्व आघूर्ण का विमीय सूत्र क्या होता है?

a. $[ML^2T^0]$ b. $[M^2 LT^{-1}]$
c. $[MLT^{-2}]$ d. $[ML^2T^{-2}]$

4. What is the dimensional formula of angular momentum ?

a. $[MLT^{-1}]$ b. $[ML^2T^{-1}]$
c. $[ML^2T^{-2}]$ d. $[M^2L^2T^{-2}]$

कोणीय संवेग का विमीय सूत्र क्या होता है?

a. $[MLT^{-1}]$ b. $[ML^2T^{-1}]$
c. $[ML^2T^{-2}]$ d. $[M^2L^2T^{-2}]$

5. Which of the following is the translatory analogue of Torque ?

a. Mass b. Force
c. Velocity d. Kinetic energy

निम्नलिखित में से कौन सा बल आघूर्ण का रेखीय अनुरूप है?

a. द्रव्यमान b. बल

c. वेग　d. गतिज ऊर्जा

6. In pure translational motion all particles of the body have-

a. Different velocity　b. Changing velocity
c. Same velocity　d. None of these

शुद्ध रेखीय गति में पिंड के सभी कण होते हैं-

a. भिन्न वेग　b. वेग बदलते रहते हैं
c. सामान वेग　d. इनमें से कोई नहीं

7. A couple produces-

a. Only linear motion
b. Only rotational motion
c. Linear and rotational motion both
d. No motion

एक कपल उत्पन्न करता है-

a. केवल रैखिक गति
b. केवल घूर्णी गति
c. रैखिक और घूर्णी गति दोनों
d. कोई गति नहीं

8. The product of moment of inertia and angular velocity is called -

a. Torque
b. Impulse
c. Linear momentum
d. Angular momentum

जड़त्व आघूर्ण और कोणीय वेग का गुणनफल कहलाता है-

a. बल आघूर्ण　b. आवेग
c. रेखीय संवेग　d. कोणीय संवेग

9. The moment of inertia of a body does not depend upon its-

a. Different orientation of axis
b. Nature of distribution of mass
c. Angular velocity
d. Axis of of rotation

किसी पिंड का जड़त्व आघूर्ण किस पर निर्भर नहीं करता है-

a. अक्ष के भिन्न- भिन्न स्थिति पर
b. द्रव्यमान के वितरण की प्रकृति पर
c. कोणीय वेग पर
d. घूर्णन की धुरी पर

10. The product of moment of inertia and the angular acceleration is called ?

a. Centre of mass
b. Torque
c. Angular momentum
d. Linear momentum

जड़त्व आघूर्ण और कोणीय त्वरण का गुणनफल कहलाता है?

a. द्रव्यमान केंद्र　b. बल आघूर्ण
c. कोणीय संवेग　d. रेखीय संवेग

11. Which of the following factors affects the location of the centre of mass of an object?

a. Shape and size of the object
b. Temperature of the object
c. Colour of the object
d. Sound produced by the object

निम्नलिखित में से कौन-सा कारक एक वस्तु के द्रव्यमान केंद्र की स्थिति पर प्रभाव डालता है?

a. वस्तु के आकृति और आकार
b. वस्तु का तापमान
c. वस्तु का रंग
d. वस्तु द्वारा उत्पन्न ध्वनि

12. Which of the following is the translatory analogue of Moment of inertia ?

a. Torque　b. Force
c. Velocity　d. Mass

निम्नलिखित में से कौन सा जड़त्व आघूर्ण का रेखीय अनुरूप है?

a. बल आघूर्ण　b. बल
c. वेग　d. द्रव्यमान

13. The centre of mass of a body-

a. Lies always at the geometrical centre
b. Lies always inside the body
c. Lies always outside the body
d. May lie within or outside the body

किसी पिंड के द्रव्यमान केंद्र-

a. सदैव ज्यामितीय केंद्र पर स्थित होता है
b. हमेशा पिंड के अंदर ही रहता है
c. हमेशा पिंड के बाहर रहता है
d. पिंड के अंदर या बाहर कहीं भी रह सकता है

14. where is the centre of mass of a uniform rod located ?

a. At one end of the rod
b. At the midpoint of the rod
c. At the top of the rod
d. At the bottom of the rod

एक छड में द्रव्यमान केंद्र कहाँ स्थित होता है?

a. छड के एक छोर में
b. छड के बीच में
c. छड के ऊपर में
d. छड के नीचे में

15. Which of the following figures does not have its centre of mass at its geometric centre?

a. Circle
b. Equilateral Triangle
c. Rectangle
d. Irregular polygon

निम्नलिखित में से कौन से आकार में ज्यामित केंद्र पर द्रव्यमान केंद्र नहीं होता है?

a. वृत्त b. समबाहु त्रिभुज
c. आयत d. अनियमित बहुभुज

16. In a symmetrical object, where is the centre of mass usually located?

a. At the edge of the object
b. At a random position
c. At the geometric centre
d. At the top of the object

एक सममिति वस्तु में, द्रव्यमान केंद्र सामान्यत: कहाँ स्थित होता है?

a. वस्तु के किनारे पर
b. एक यादृच्छिक स्थान पर
c. ज्यामिती केंद्र पर
d. वस्तु के ऊपर

17. The unit of angular momentum is-

a. Nm b. Kg $m^{-1}s^{-1}$
c. Kg m^2 s^{-1} d. Kg^2 $m^{-2}s^{-1}$

कोणीय संवेग का मात्रक है-

a. Nm b. Kg $m^{-1}s^{-1}$
c. Kg m^2 s^{-1} d. Kg^2 $m^{-2}s^{-1}$

18. Which of the following factors affects the magnitude of torque?

a. Force applied and lever arm length
b. Mass and volume of the object
c. Temperature and colour of the object
d. Direction of motion

निम्नलिखित में से कौन-सा कारक बल आघूर्ण की मात्रा पर प्रभाव डालता है?

a. आरोपित बल और लीवर आर्म की लंबाई
b. वस्तु का द्रव्यमान और आयतन
c. वस्तु का तापमान और रंग
d. गति की दिशा

19. A particle moves with a constant velocity parallel to the x-axis.What is its angular momentum with respect to the origin ?

a. is zero b. remains constants
c. goes on increase d. goes on decrease

एक कण x-अक्ष के समानांतर एक स्थिर वेग से चल रहा है। मूल बिंदु (origin) के परितः इसका कोणीय संवेग क्या होगा ?

a. शून्य रहता है| b. अचर रहता है|
c. बढ़ता रहता है| d. घटता रहता है|

20. When is torque considered positive in a rotational system?

a. When it causes clockwise rotation
b. When it causes anti-clockwise rotation
c. Torque is always positive
d. Torque is always negative

एक घूर्णन प्रणाली में बल आघूर्ण को कब धनात्मक माना जाता है?

a. जब यह घड़ी की दिशा में घुमाता है |
b. जब यह घड़ी की विपरीत दिशा में घुमाता है |
c. बल आघूर्ण हमेशा धनात्मक होता है |
d. बल आघूर्ण हमेशा ऋणात्मक होता है |

21. Radius of gyration of thin rod of mass M and length L about an axis passing through its mid point and perpendicular to its length is:-

a. $K = \frac{L}{\sqrt{2}}$ b. $K = L$
c. $K = \frac{L}{\sqrt{3}}$ d. $K = \frac{L}{\sqrt{12}}$

द्रव्यमान M और लंबाई L की एक पतली छड़ का उस अक्ष के परितः परिभ्रमण त्रिज्या क्या होगा जो उसके मध्य बिंदु से से होकर गुजरता है और इसके तल पर लंबवत है ?

a. $K = \frac{L}{\sqrt{2}}$ b. $K = L$
c. $K = \frac{L}{\sqrt{3}}$ d. $K = \frac{L}{\sqrt{12}}$

22. What is the formula for angular momentum?

a. $L = mv$ b. $L = I\omega$
c. $L = Fd$ d. $L = Pt$

कोणीय संवेग का सूत्र क्या है?

a. $L = mv$ b. $L = I\omega$
c. $L = Fd$ d. $L = Pt$

23. What is the Radius of gyration of a Spherical shell of mass M and radius R about its diameter ?

a. $K = \frac{R}{\sqrt{2}}$ b. $K = \sqrt{\frac{2}{5}}R$
c. $K = R$ d. $K = \sqrt{\frac{2}{3}}R$

द्रव्यमान M और त्रिज्या R के एक खोखले गोले का उसके व्यास के परितः परिभ्रमण त्रिज्या क्या होगा ?

a. $K = \frac{R}{\sqrt{2}}$ b. $K = \sqrt{\frac{2}{5}}R$
c. $K = R$ d. $K = \sqrt{\frac{2}{3}}R$

24. According to the conservation of angular momentum, what happens to an object's angular momentum when no external torques act on it?

a. It decreases
b. It remains constant
c. It increases
d. It becomes zero

कोणीय संवेग के संरक्षण के अनुसार, जब कोई बाह्य बल आघूर्ण क्रियान्वित नहीं होती है तो किसी पिंड का कोणीय संवेग क्या होता है?

a. यह घटता है | b. यह अचर रहता है |
c. यह बढ़ता है | d. यह शून्य होता है |

25. What is the Moment of inertia of a solid sphere of mass M and radius R about its diameter ?

a. $\frac{2}{3}MR^2$ b. $\frac{2}{5}MR^2$
c. $\frac{7}{5}MR^2$ d. $\frac{5}{3}MR^2$

द्रव्यमान M और त्रिज्या R के एक ठोस गोले का उसके व्यास के परितः जड़त्व आघूर्ण क्या होगा ?

a. $\frac{2}{3}MR^2$ b. $\frac{2}{5}MR^2$
c. $\frac{7}{5}MR^2$ d. $\frac{5}{3}MR^2$

26. What is the Moment of inertia of a Spherical shell of mass M and radius R about its diameter ?

a. $\frac{2}{3}MR^2$ b. $\frac{2}{5}MR^2$
c. $\frac{7}{5}MR^2$ d. $\frac{5}{3}MR^2$

द्रव्यमान M और त्रिज्या R के एक खोखले गोला का उसके व्यास के परितः जड़त्व आघूर्ण क्या होगा ?

a. $\frac{2}{3}MR^2$ b. $\frac{2}{5}MR^2$
c. $\frac{7}{5}MR^2$ d. $\frac{5}{3}MR^2$

27. A body is in translational equilibrium if the net external-

a. Force acting on it is zero
b. Torque acting it is zero
c. Torque acting on it is zero but force acting on it is non-zero
d. Both (a) and (b)

एक पिंड रेखीय संतुलन में होगा यदि इस पर लगने वाला कुल बाहरी-

a. बल शून्य हो
b. बल आघूर्ण शून्य हो
c. बल आघूर्ण शून्य हो लेकिन इस पर लगने वाला बल शून्य नहीं हो
d. (a) और (b) दोनों

28. What is the Moment of inertia of a thin Circular Ring of mass M and radius R about an axis passing through its centre and perpendicular to its plane ?

a. $\frac{1}{2}MR^2$ b. MR^2
c. $\frac{1}{4}MR^2$ d. $2MR^2$

द्रव्यमान M और त्रिज्या R के एक पतली वृताकार वलय का उस अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण क्या होगा जो इसके केंद्र से होकर गुजरता है और इसके तल पर लंबवत है ?

a. $\frac{1}{2}MR^2$ b. MR^2
c. $\frac{1}{4}MR^2$ d. $2MR^2$

29. Which of the following principles is used by a ballet dancer during her performance?

a. Conservation of mass
b. Conservation of energy
c. Conservation of linear momentum
d. Conservation of angular momentum

एक बैले नर्तकी (ballet dancer) अपने प्रदर्शन के दौरान निम्नलिखित में से किस सिद्धांत का उपयोग करती है?

a. द्रव्यमान का संरक्षण
b. ऊर्जा का संरक्षण
c. रैखिक संवेग का संरक्षण
d. कोणीय संवेग का संरक्षण

30. What is the Moment of inertia of a thin rod of mass M and length L about an axis passing through its mid point and perpendicular to its length ?

a. $\frac{1}{12}ML^2$ b. ML^2
c. $\frac{1}{3}ML^2$ d. $2ML^2$

द्रव्यमान M और लंबाई L की एक पतली छड़ का का उस अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण क्या होगा जो उसके मध्य बिंदु से से होकर गुजरता है और इसके तल पर लंबवत है ?

a. $\frac{1}{12}ML^2$ b. ML^2
c. $\frac{1}{3}ML^2$ d. $2ML^2$

31. In a seesaw, where should a heavier person sit to balance with a lighter person on the other side?

a. Closer to the pivot point
b. Farther from the pivot point
c. It doesn't matter where they sit
d. At the midpoint of the seesaw

झूले (seesaw) में, एक भारी व्यक्ति को दूसरी तरफ हल्के व्यक्ति के साथ संतुलन बनाने के लिए कहाँ बैठना

चाहिए?

a. धुरी बिंदु के करीब
b. धुरी बिंदु से दूर
c. इससे कोई फर्क नहीं पड़ता कि वे कहां बैठते हैं
d. झूले के मध्यबिंदु पर

32. What is the Radius of gyration of a solid sphere of mass M and radius R about its diameter ?

द्रव्यमान M और त्रिज्या R के एक ठोस गोले का उसके व्यास के परितः परिभ्रमण त्रिज्या क्या होगा ?

a. $K = \frac{R}{\sqrt{2}}$ b. $K = \sqrt{\frac{2}{5}}R$
c. $K = R$ d. $K = \sqrt{\frac{2}{3}}R$

33 On what quantities does angular momentun depend ?

a. mass and velocity
b. mass and radius
c. moment of inertia and angular velocity
d. mass and force

कोणीय संवेग किन घटकों पर निर्भर करता है ?

a. द्रव्यमान और वेग पर
b. द्रव्यमान और त्रिज्या पर
c. जड़त्व आघूर्ण और कोणीय वेग पर
d. द्रव्यमान और बल पर

34. What is the Radius of gyration of a thin Circular disc of mass M and radius R about an axis passing through its centre and perpendicular to its plane ?

द्रव्यमान M और त्रिज्या R के एक वृत्ताकार डिस्क का उस अक्ष के परितः परिभ्रमण त्रिज्या क्या होगा जो इसके केंद्र से होकर गुजरता है और इसके तल पर लंबवत है ?

a. $K = \frac{R}{\sqrt{2}}$ b. $K = \sqrt{\frac{2}{5}}R$
c. $K = R$ d. $K = \sqrt{\frac{2}{3}}R$

35. Which of the following is constant, when external torque acting on a body is zero ?

a. Linear momentum
b. Angular momentum
c. Force
d. Linear impulse

निम्नलिखित में से कौन अचर होता है, जब किसी पिंड पर लगने वाला बाहरी बलाघूर्ण शून्य होता है ?

a. रेखीय संवेग b. कोणीय संवेग
c. बल d. रेखीय आवेग

36. If the net torque acting on an object is zero, what can be said about its angular acceleration?

a. It must be zero
b. It may or may not be zero
c. It must be constant
d. It depends on the shape of the object

यदि एक वस्तु पर कुल बल आघूर्ण शून्य हो , तो उसके कोणीय त्वरण के बारे में क्या कहा जा सकता है?

a. यह अवश्य शून्य होगा |
b. यह शून्य हो भी सकता है या नहीं भी हो सकता है|
c. यह अवश्य अचर होगा |
d. यह वस्तु के आकार पर निर्भर करता है|

37. What is the Moment of inertia of a thin Circular Ring of mass M and radius R about its diameter ?

द्रव्यमान M और त्रिज्या R के एक पतली वृत्ताकार वलय का उसके व्यास के परितः जड़त्व आघूर्ण क्या होगा ?

a. $\frac{1}{2}MR^2$ b. MR^2
c. $\frac{1}{4}MR^2$ d. $2MR^2$

38. When is an object in rotational equilibrium?

a. When it is at rest
b. When the net torque acting on it is zero
c. When it has zero angular velocity
d. When it has zero angular acceleration

कोई वस्तु कब घूर्णन संतुलन में होता है ?

a. जब वह विराम से होती है |
b. जब उस पर कुल बल आघूर्ण शून्य होता है|
c. जब उसमें कोई कोणीय वेग नहीं होता है|
d. जब उसमें कोई कोणीय त्वरण नहीं होता है|

39. What is the Moment of inertia of a thin Circular disc of mass M and radius R about an axis passing through its centre and perpendicular to its plane ?

द्रव्यमान M और त्रिज्या R के एक वृत्ताकार डिस्क का उस अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण क्या होगा जो इसके केंद्र से होकर गुजरता है और इसके तल पर लंबवत है ?

a. $\frac{1}{2}MR^2$ b. MR^2
c. $\frac{1}{4}MR^2$ d. $2MR^2$

40. The SI unit of moment of inertia is-

जड़त्व आघूर्ण की SI मात्रक है-

a. $kg \cdot m$ b. $kg \cdot m^2$
c. N/m d. J/s

41. What is the linear velocity of a particle at the axis of rotation of a rigid body ?

a. Zero b. High

c. Low d. Both (a) and (b)

किसी दृढ पिंड के घूर्णन अक्ष पर किसी कण का रैखिक वेग क्या होता है ?

a. शुन्य b. अधिक

c. कम d. (a) और (b) दोनों

42. What is the unit of angular momentum?

कोणीय संवेग का मात्रक क्या है?

a. N-m b. $Kg.m^2/s$

c. Kg.m/s d. Kg^2m^2/s

43. A wire of mass 'M' and length 'x' is bent in the form of a circular ring. What is the moment of inertia of the ring about its axis ?

a. $\frac{Mx^2}{4\pi^2}$ b. $\frac{Mx^2}{4}$

c. $\frac{Mx^2}{\pi^2}$ d. None of these

द्रव्यमान 'M' और लंबाई 'x' का एक तार एक गोलाकार वलय के रूप में मोड़ा गया है। अपनी धुरी के परितः वलय का जड़त्व आघूर्ण क्या होगा ?

a. $\frac{Mx^2}{4\pi^2}$ b. $\frac{Mx^2}{4}$

c. $\frac{Mx^2}{\pi^2}$ d. इनमे से कोई नहीं

44. What is the unit of the radius of gyration?

परिभ्रमण त्रिज्या का मात्रक क्या है?

a. $Kg\ m^2$ b. Kg

c. m d. Kg m

45. If a body is rotating about an axis, passing through its centre of mass then its angular momentum is directed along its -

a. Radius b. Tangent

c. Circumference d. Axis of rotation

यदि एक पिंड उस अक्ष के चारों ओर घूम रहा है,जो उसके द्रव्यमान केंद्र से गुजरता है, तो उसका कोणीय संवेग किस दिशा में निर्देशित होगा ?

a. त्रिज्या b. स्पर्शरेखा

c. परिधी d. घूर्णन की धुरी

46. The distance between two point masses m_1 and m_2 is d. What is the distance of its centre of mass from m_2 ?

यदि दो बिंदु द्रव्यमान m_1 और m_2 के बीच की दूरी d हो , तो m_2 से इसके द्रव्यमान केंद्र की दूरी क्या होगी?

a. $\frac{m_2 d}{m_1+m_2}$

b. $\frac{m_1 d}{m_1+m_2}$

c. $\frac{m_1}{m_2}d$

d. $\frac{m_2 d}{m_1}d$

47. Which is the wrong formula from the following?

निम्नलिखित में से कौन सा गलत सूत्र है?

a. $\tau = I\alpha$ b. F = ma

c. $L = I\omega$ d. $I = \tau\alpha$

48. Rotational kinetic energy is equal to-

घूर्णी गतिज ऊर्जा बराबर होती है-

a. Iw^2, b. I^2w^2,

c. $\frac{3}{2}Iw^2$. d. $\frac{1}{2}Iw^2$

49. A body with moment of inertia 3 kgm^2 is rotating with an angular velocity of 2 rad/s. If the rotational kinetic energy of that body is equal to the linear kinetic energy of a body of mass 12 kg, then what is the linear velocity of the body of mass 12 kg?

3 kgm^2 जड़त्व आघूर्ण वाला एक पिंड 2 rad/s के कोणीय वेग से घूर्णन कर रहा है|अगर उस पिंड की घूर्णन गतिज ऊर्जा 12 kg द्रव्यमान के पिंड के रेखीय गतिज उर्जा के समान है तो 12 kg द्रव्यमान के पिंड का रेखीय वेग क्या होगा ?

a. 1 m/s b. 2 m/s

c. 4 m/s d. 8 m/s

50. On what does the moment of inertia of a body not depend ?

a. Axis of rotation

b. Mass

c. Distribution of mass

d. Angular velocity

किसी पिंड का जड़त्व आघूर्ण किस पर निर्भर नहीं करता है ?

a. घूर्णन अक्ष पर

b. द्रव्यमान पर

c. द्रव्यमान के वितरण पर

d. कोणीय वेग पर

51. If earth were to shrink suddenly,then duration of the day would -

a. Increase b. Decrease

c. Remain the same d. Become zero

यदि पृथ्वी अचानक सिकुड़ जाये तो दिन की अवधि में क्या बदलाव होगा ?

a. बढ़ जायेगा | b. घट जायेगा |

c. समान रहेगा | d. शून्य हो जायेगा |

52. What is the S.I unit of angular acceleration ?

कोणीय त्वरण की S.I मात्रक क्या है?

a. Degree s^{-1} b. Degree s^{-2}

c. Rad s^{-1} d. Rad s^{-2}

53. What is angular acceleration of the motor

wheel If the angular speed of a motor wheel increases from 2400 rpm to 6240 rpm in 16 seconds ?

मोटर पहिये का कोणीय त्वरण क्या होगा यदि मोटर पहिये की कोणीय वेग 16 सेकंड में 2400 rpm से बढ़कर 6240 rpm हो जाती है?

a. 2π rad s^{-2} b. 4π rad s^{-2}

c. 6π rad s^{-2} d. 8π rad s^{-2}

54. The motion of planets in the solar system is an example of the conservation of -

a. Mass

b. Linear momentum

c. Angular momentum

d. Energy

सौर मंडल में ग्रहों की गति किसके संरक्षण का एक उदाहरण है?

a. द्रव्यमान b. रेखीय संवेग

c. कोणीय संवेग d. ऊर्जा

55. If you double the mass of an object while keeping its shape and size the same, how does its moment of inertia change?

a. It doubles

b. It halves

c. It remains the same

d. It becomes four times

यदि आप किसी वस्तु का आकार और साइज़ समान रखते हुए उसका द्रव्यमान दोगुना कर देते हैं, तो उसका जड़त्व आघूर्ण में क्या बदलाव होगा ?

a. यह दोगुना हो जाता है |

b. यह आधा हो जाता है |

c. यह समान रहता है |

d. यह चार गुना हो जाता है |

56. A solid sphere of mass 50 kg, has radius 0.5m then what is the moment of inertia about its diameter ?

50 किग्रा द्रव्यमान के एक ठोस गोले की त्रिज्या 0.5 मी है तो इसके व्यास के परितः जड़त्व आघूर्ण क्या होगा?

a. 2.5 kg m^2 b. 5 kg m^2

c. 1.5 kg m^2 d. 3 kg m^2

57. What is the unit of the Torque ?

a. N b. Nm

c. Nm^2 d. None of these

बल आघूर्ण का मात्रक क्या है?

a. N b. Nm

c. Nm^2 d. इनमे से कोई नही

58. A dancer on ice spins faster when she folds her arms. This is due to -

a. Increases in energy and increase in angular momentum

b. Decrease in friction at the skates

c. Constant angular momentum and increase in kinetic energy

d. Increase in energy and decrease in angular momentum

बर्फ पर एक नर्तकी जब अपनी भुजाएं मोड़ती है तो वह तेजी से घूमती है। इसकी वजह है -

a. ऊर्जा में वृद्धि और कोणीय संवेग में वृद्धि

b. स्केट्स पर घर्षण में कमी

c. अचर कोणीय संवेग और गतिज ऊर्जा में वृद्धि

d. ऊर्जा में वृद्धि और कोणीय संवेग में कमी

59. If the radius of earth becomes half and its mass remains unaltered then a day will be of-

यदि पृथ्वी की त्रिज्या आधी हो जाये तथा उसका द्रव्यमान अपरिवर्तित रहे तो एक दिन होगा-

a. 14 hours b. 12 hours

c. 6 hours d. 4 hours

60. The velocity of centre of mass of the system remains constant ,if the external force acting on the system is-

a. Minimum b. Zero

c. Maximum d. None of these

द्रव्यमान केंद्र का वेग अचर रहता है,यदि निकाय पर कार्य करने वाला बाह्य बल हो -

a. न्यूनतम b. शून्य

c. अधिकतम d. इनमें से कोई नहीं

61. The direction of the angular velocity vector is along-

a. The tangent to the circular path

b. The axis of rotation

c. Towards the centre

d. Away from the centre

कोणीय वेग सदिश की दिशा किस ओर होती है-

a. वृत्ताकार पथ की स्पर्शरेखा के ओर|

b. घूर्णन की धुरी के ओर|

c. केंद्र की के ओर|

d. केंद्र से दूर|

62. A body is rotating with angular velocity $\vec{\omega}=(3\hat{i}-4\hat{j}+\hat{k})$ .The linear velocity of a point having position vector $\vec{r}=(5\hat{i}-6\hat{j}+6\hat{k})$ is -

a. $(-18\hat{i}-13\hat{j}+2\hat{k})$

b. $(18\hat{i}-13\hat{j}+2\hat{k})$

c. $(6\hat{i}-2\hat{j}+6\hat{k})$

d. None of these

एक पिंड कोणीय वेग $\vec{\omega}=(3\hat{i}-4\hat{j}+\hat{k})$ से घूम रहा है। स्थिति सदिश $\vec{r}=(5\hat{i}-6\hat{j}+6\hat{k})$ वाले बिंदु का रैखिक वेग क्या होगा ?

a. $(-18\hat{i}-13\hat{j}+2\hat{k})$

b. $(18\hat{i}-13\hat{j}+2\hat{k})$

c. $(6\hat{i}-2\hat{j}+6\hat{k})$

d. इनमे से कोई नहीं

63. What is the Moment of inertia of a cylindrical shell of mass M and radius R about its own axis ?

द्रव्यमान M और त्रिज्या R के एक खोखले बेलन का उसके अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण क्या होगा ?

a. MR^2 b. $\frac{1}{2}MR^2$

c $2MR^2$ d. $\frac{2}{3}MR^2$

64. What is the Moment of inertia of a solid cylinder of mass M and radius R about its own axis ?

द्रव्यमान M और त्रिज्या R के एक ठोस बेलन का उसके अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण क्या होगा ?

a. MR^2 b. $\frac{1}{2}MR^2$

c $2MR^2$ d. $\frac{2}{3}MR^2$

65. What is the radius of gyration of a cylindrical shell of mass M and radius R about its own axis ?

द्रव्यमान M और त्रिज्या R के एक खोखले बेलन का उसके अक्ष के परितः परिभ्रमण त्रिज्या क्या होगा ?

a. $K=\frac{R}{\sqrt{2}}$ b. $K=\sqrt{\frac{2}{5}}R$

c. $K=R$ d. $K=\sqrt{\frac{2}{3}}R$

66. What is the radius of gyration of a solid cylinder of mass M and radius R about its own axis ?

द्रव्यमान M और त्रिज्या R के एक ठोस बेलन का उसके अक्ष के परितः परिभ्रमण त्रिज्या क्या होगा ?

a. $K=\frac{R}{\sqrt{2}}$ b. $K=\sqrt{\frac{2}{5}}R$

c. $K=R$ d. $K=\sqrt{\frac{2}{3}}R$

67. Calculate the moment of inertia of a thin uniform ring about diameter, if its moment of inertia about an axis passing through the centre and perpendicular to the plane is 24 kg m².

व्यास के परितः एक पतली वृताकार वलय की जड़त्व आघूर्ण की गणना करें, यदि केंद्र से गुजरने वाली और इसके तल के लंबवत अक्ष के परितः इसकी जड़त्व आघूर्ण 24 kg m² है।

a. 12 kg m² b. 3 kg m²

c. 6 kg m² d. 9 kg m²

68. Which of the following is the correct relation between linear velocity $\vec{v}$ and angular velocity $\vec{\omega}$ of a particle ?

किसी कण के रैखिक वेग $\vec{v}$ और कोणीय वेग $\vec{\omega}$ के बीच निम्नलिखित में से कौन सा सही संबंध है?

a. $\vec{v}=\vec{r}\times\vec{\omega}$

b. $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$

c. $\vec{\omega}=\vec{v}\times\vec{r}$

d. None of these (इनमे से कोई नही)

69. A solid cylinder of mass M and radius R rotates about its axis with angular speed ω. Its rotational kinetic energy is -

द्रव्यमान M और त्रिज्या R का एक ठोस बेलन अपनी धुरी के चारों ओर कोणीय वेग ω से घूम रहा है। इसकी घूर्णन गतिज ऊर्जा है -

a. $\frac{1}{2}MR^2\omega^2$ b. $MR^2\omega^2$

c. $2MR^2\omega^2$ d. $\frac{1}{4}MR^2\omega^2$

70. A cylinder shell of mass M and radius R rotates about its axis with angular speed ω. Its rotational kinetic energy is -

द्रव्यमान M और त्रिज्या R का एक खोखला बेलन अपनी धुरी के चारों ओर कोणीय वेग ω से घूम रहा है। इसकी घूर्णन गतिज ऊर्जा है -

a. $\frac{1}{2}MR^2\omega^2$ b. $MR^2\omega^2$

c. $2MR^2\omega^2$ d. $\frac{1}{4}MR^2\omega^2$

71. If the ice of the Earth's poles melts and comes to the equatorial region, then the duration of day -

a. will decrease

b. Will increase

c. will be uncertain

d. will remain the same

यदि पृथ्वी के ध्रुवों की बर्फ पिघलकर भूमध्य क्षेत्र (equatorial region) में आ जाए तो दिन की अवधि (duration) -

a. घट जाएगा

b. बढ़ जाएगा

c. अनिश्चित हो जाएगा

d. समान रहेगा

72. A wheel of 1 metre diameter makes 30 revolutions in a minute, then the linear velocity of any point on the circumference is -

1 मीटर व्यास का एक पहिया एक मिनट में 30 चक्कर लगाता है, तो परिधि पर के किसी बिंदु का रैखिक वेग क्या होगा ?

a. π m/s b. $\frac{\pi}{2}$ m/s

c. 2π m/s d. 4π m/s

73. A disc rotates from rest under an angular acceleration of 2π rad/s^2. How many revolutions will it make in 10s?

एक डिस्क 2π rad/s^2 के कोणीय त्वरण के अधीन विरामावस्था से घूर्णन करती है। 10s में यह कितना चक्कर लगाएगी?

a. 25 b. 50

c. 100 d. 200

74. If a person is making a spinning motion by extending his hand on a rotating table, then when he bends his hand, his spinning rate -

a. will decrease

b. there will be no change in

c. will increase

d. will become zero

यदि घूमते हुए टेबुल पर एक मनुष्य अपना हाथ फैलाकर चक्रनी गति कर रहा हो तो जब वह अपने हाथ को झुकाएगा तो उसकी चक्रणी दर (spinning rate) -

a. घट जाएगी

b. में कोई परिवर्तन नहीं होगा

c. बढ़ जाएगी

d. शून्य हो जाएगी

75. If a concentric disk is cut out from a circular plate, then the location of the centre of mass of the remaining part-

a. Will change

b. will remain unchanged

c. Depend on the size of the part removed

d. May or may not depend on the size of the part removed

यदि एक वृत्ताकार प्लेट से एक संकेंद्रीय (concentric) डिस्क काटकर निकाल दिया जाए तो बचे भाग के द्रव्यमान केंद्र का स्थान-

a. बदल जाएगा

b. अपरिवर्तित रहेगा

c. निकाले गए भाग के साइज पर निर्भर करेगा

d. निकाले गए भाग के साइज पर निर्भर कर भी सकता है और नहीं भी कर सकता है

ANSWER OF MCQ QUESTIONS
उत्तर कुंजी:

1.b.	2.d.	3.a.	4.b.	5.b.	6.c.	7.b.
8.d.	9.c.	10.b.	11.a.	12.d.	13.d.	14.b.
15.d.	16.c.	17.c.	18.a.	19.b.	20.b.	21.d.
22.b.	23.d.	24.b.	25.b.	26.a.	27.a.	28.b.
29.d.	30.a.	31.a.	32.b.	33.c.	34.a.	35.b.
36.a.	37.a.	38.b.	39.a.	40.b.	41.a.	42.b.
43.a.	44.c.	45.d.	46.b.	47.d.	48.d.	49.d.
50.d.	51.b.	52.d.	53.d.	54.c.	55.a.	56.b.
57.b.	58.c.	59.c.	60.b.	61.b.	62.a.	63.a.
64.b.	65.c.	66.a.	67.a.	68.b.	69.d.	70.a.
71.b.	72.b.	73.b.	74.c.	75.b.		

VERY SHORT TYPE QUESTIONS:
अति लघु उत्तरीय प्रश्न:

1. Under what conditions, the torque due to an applied force is zero?

Ans- We know that $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = rF\sin\theta\,\hat{n}$ so torque due to an applied force is zero when

(i) θ = 0° or 180°,

(ii) r = 0

i.e. the applied force passes through the axis of rotation.

किन परिस्थितियों में, आरोपित बल के कारण बल आघूर्ण शून्य होता है?

उत्तर: हम जानते हैं कि, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = rF\sin\theta\,\hat{n}$ इसलिय किसी आरोपित बल के कारण बल आघूर्ण शून्य होगा जब -

(i) θ = 0° या 180°,

(ii) r = 0

यानी आरोपित बल घूर्णन अक्ष से होकर गुजरता हो ।

2. Define rigid body.

Ans- A body is said to be a rigid body, when it has perfectly definite shape and size. The distance between all points of particles of such a body do not change, while applying any force on it.

दृढ़ पिंड को परिभाषित करें|

उत्तर: किसी पिंड को दृढ़ पिंड तब कहा जाता है, जब उसका आकृति और परिमाप बिल्कुल निश्चित हो। ऐसे पिंड पर कोई भी बल लगाने पर उसके सभी कणों के बिंदुओं के बीच की दूरी नहीं बदलती है।

3. Define translatory motion.

Ans- A rigid body performs a pure translational motion, if each particle of the body undergoes the same displacement in the same direction in a given interval of time.

स्थानांतरण गति को परिभाषित करें।

उत्तर: एक दृढ़ पिंड शुद्ध स्थानांतरण गति करता है, यदि पिंड का प्रत्येक कण एक निश्चित समय अंतराल में एक ही दिशा में समान विस्थापन पूरा करता हो।

4. Define rotational motion.

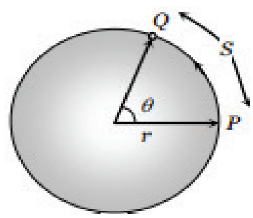
Ans- A rigid body performs a pure rotational motion, if each particle of the body moves in a circle, and the centre of all the circles lie on a straight line called the axes of rotation. Example: Rotation of ceiling fan,Rotation of blades of a windmill.

घूर्णन गति को परिभाषित करें।

उत्तर: एक दृढ़ पिंड शुद्ध घूर्णन गति करता है, यदि पिंड का प्रत्येक कण एक वृत्त में गति करता है, और सभी वृत्तों का केंद्र एक सीधी रेखा पर स्थित होता है जिसे घूर्णन की धुरी कहा जाता है।उदाहरण: छत के पंखे का घूमना, पवनचक्की के ब्लेड का घूमना।

5. Define Angular Displacement.

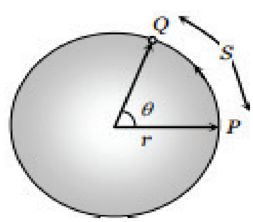
Angular Displacement:- It is the angle described by the position vector $\vec{r}$ about the axis of rotation.



Angular displacement $(\theta) = \dfrac{\text{Linear displacement (s)}}{\text{radius (r)}}$

कोणीय विस्थापन को परिभाषित करें|

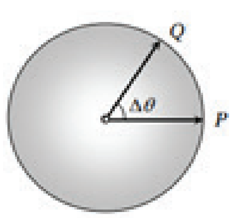
उत्तर: कोणीय विस्थापन:-यह स्थिति सदिश $\vec{r}$ द्वारा घूर्णन अक्ष पर वर्णित कोण है |



कोणीय विस्थापन $(\theta) = \dfrac{\text{रैखिक विस्थापन (s)}}{\text{त्रिज्या (r)}}$

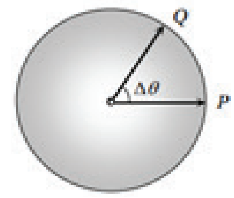
6. Define angular velocity.

Angular Velocity:- The angular displacement per unit time is called angular velocity. If a particle moves from P to Q in time Δt then $\omega=(\triangle\theta)/(\triangle t)$, where $\triangle\theta$ is the angular displacement.



कोणीय वेग को परिभाषित करें|

उत्तर: **कोणीय वेग**:-प्रति इकाई समय के कोणीय विस्थापन को कोणीय वेग कहा जाता है।यदि कोई कण$\triangle t$ समय में P से Q की ओर गति करता है तो $\omega=(\triangle\theta)/(\triangle t)$ होगा जहाँ $\triangle\theta$ कोणीय विस्थापन है।



7. What is the relation between Linear velocity and Angular velocity ?

Ans- $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

where $\vec{v}$ = linear velocity,

$\vec{r}$ = radius vector

$\vec{\omega}$ =Angular velocity is an axial vector, whose direction is normal to the rotational plane.

रैखिक वेग और कोणीय वेग के बीच क्या संबंध होता हैं ?

उत्तर: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

जहाँ $\vec{v}$ = रैखिक वेग,

$\vec{r}$ = radius vector

$\vec{\omega}$ = कोणीय वेग एक अक्षीय सदिश है, जिसकी दिशा घूर्णनशील तल के लम्बवत होती है।

8. Define Angular Acceleration.

Ans- The rate of change of angular velocity is defined as angular acceleration.If particle has angular velocity ω_1 at time t_1 and angular velocity ω_2 at time t_2 then, Angular acceleration -

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{\omega_2} - \vec{\omega_1}}{t_2 - t_1}$$

कोणीय त्वरण को परिभाषित करें|

उत्तर: कोणीय वेग में परिवर्तन की दर को कोणीय त्वरण के रूप में परिभाषित किया जाता है। यदि एक कण का कोणीय वेग समय t_1 पर ω_1 और समय t_2 पर कोणीय वेग ω_2 हो, तो कोणीय त्वरण-

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{\omega_2} - \vec{\omega_1}}{t_2 - t_1}$$

9. A body is rotating at a steady rate. Is a torque acting on the body?

Ans- No, torque is required only for producing angular acceleration.

यदि एक पिंड अचर गति से घूर्णन कर रहा हो तो क्या कोई बल आघूर्ण पिंड पर कार्य कर रहा है?

उत्तर: नहीं, बल आघूर्ण की आवश्यकता केवल कोणीय त्वरण उत्पन्न करने के लिए होती है।

10. Define torque.

Torque:-The turning effect of a force about the axis of rotation is called moment of force or torque due to the force.Torque or moment of a force about the axis of rotation-

$$\vec{\tau}=\vec{r}\times\vec{F}=rF\sin\theta\,\hat{n}$$

बल आघूर्ण को परिभाषित करें|

उत्तर: घूर्णन अक्ष के परितः किसी बल के घूमाने के प्रभाव को बल आघूर्ण कहा जाता है। घूर्णन अक्ष के परितः बल आघूर्ण- $\vec{\tau}=\vec{r}\times\vec{F}=rF\sin\theta\,\hat{n}$

11. Define Angular Momentum

Ans- The moment of linear momentum of a body with respect to any axis of rotation is known as angular momentum. If $\vec{P}$ is the linear momentum of a particle and $\vec{r}$ is its position vector from the point of rotation then angular momentum- $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{P}$

कोणीय संवेग को परिभाषित करें|

उत्तर: घूर्णन के किसी अक्ष के संबंध में किसी पिंड के रैखिक संवेग के आघूर्ण को कोणीय संवेग के रूप में जाना जाता है। अगर $\vec{P}$ एक कण का रैखिक संवेग है और $\vec{r}$ घूर्णन के बिंदु से इसकी स्थिति सदिश हो तो कोणीय संवेग - $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{P}$

SHORT ANSWER TYPE QUESTIONS:
लघु उत्तरीय प्रश्न:

1. If angular displacement (θ) of a flywheel varies with time as $\theta=at+bt^2+ct^3$ Then what is the angular acceleration ?

Ans- Angula acceleration-

$$\alpha=\frac{d^2\theta}{dt^2}=\frac{d^2}{dt^2}(at+bt^2+ct^3)=2b+6ct$$

यदि एक फ्लाईव्हील का कोणीय विस्थापन $\theta=at+bt^2+ct^3$ समय के साथ बदलता रहता है तो कोणीय त्वरण क्या होगा ?

उत्तर:- कोणीय त्वरण- $\alpha=\frac{d^2\theta}{dt^2}=\frac{d^2}{dt^2}(at+bt^2+ct^3)=2b+6ct$

2. The coordinates of the positions of particles of mass 7 gm, 4 gm and 10 gm are (1,5,3), (2,5,7) and (3,3,1) cm respectively. What is the position of the centre of mass of the system ?

Ans- Given- m_1 = 7 gm, m_2 = 4 gm, m_3 = 10 gm

and $\vec{r}_1=(\hat{i}+5\hat{j}-3\hat{k}),\ r_2=(2i+5j+7k),\ r_3=(3\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})$

Position vector of center of mass-

$$\vec{r}=\frac{7(\hat{i}+5\hat{j}-3\hat{k})+4(2\hat{i}+5\hat{j}+7\hat{k})+10(3\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})}{7+4+10}$$

$$=\frac{(45\hat{i}+85\hat{j}-3\hat{k})}{21}$$

$$\Rightarrow \vec{r}=\frac{15}{7}\hat{i}+\frac{85}{21}\hat{j}-\frac{1}{7}\hat{k}$$

So co-ordinates of center of mass is- $\left[\frac{15}{7},\frac{85}{21},\frac{-1}{7}\right]$

7 ग्राम, 4 ग्राम और 10 ग्राम द्रव्यमान के कणों की स्थिति के निर्देशांक क्रमशः (1,5,3), (2,5,7) और (3, 3,1) सेमी हैं। निकाय के द्रव्यमान केंद्र की स्थिति क्या होगी ?

उत्तर:- **दिया गया है-**

m_1 = 7 gm, m_2 = 4 gm, m_3 = 10 gm

और $\vec{r}_1=(\hat{i}+5\hat{j}-3\hat{k}),\ r_2=(2i+5j+7k),\ r_3=(3\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})$

द्रव्यमान केंद्र का स्थिति सदिश-

$$\vec{r}=\frac{7(\hat{i}+5\hat{j}-3\hat{k})+4(2\hat{i}+5\hat{j}+7\hat{k})+10(3\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})}{7+4+10}$$

$$=\frac{(45\hat{i}+85\hat{j}-3\hat{k})}{21}$$

$$\Rightarrow \vec{r}=\frac{15}{7}\hat{i}+\frac{85}{21}\hat{j}-\frac{1}{7}\hat{k}$$

इसलिए द्रव्यमान केंद्र का निर्देशांक- $\left[\frac{15}{7},\frac{85}{21},\frac{-1}{7}\right]$

3. The velocities of three particles of masses 20g, 30g and 50 g are $10\hat{i}$, $10\hat{j}$, and $10\hat{k}$ respectively. What is the velocity of the centre of mass of the three particles ?

Ans- Velocity of centre of mass-

$$v_{cm}=\frac{m_1v_1+m_2v_2+m_3v_3}{m_1+m_2+m_3}$$

$$=\frac{20\times10\hat{i}+30\times10\hat{j}+50\times10\hat{k}}{100}$$

$$=2\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k}$$

20g, 30g और 50 g द्रव्यमान वाले तीन कणों के वेग क्रमशः $10\hat{i}$, $10\hat{j}$ और $10\hat{k}$ हैं। तीनों कणों के द्रव्यमान केन्द्र का वेग(velocity of the centre of mass) क्या होगा ?

उत्तर:- द्रव्यमान केंद्र का वेग-

$$v_{cm}=\frac{m_1v_1+m_2v_2+m_3v_3}{m_1+m_2+m_3}$$

$$= \frac{20\times 10\hat{i} + 30\times 10\hat{j} + 50\times 10\hat{k}}{100}$$

$$= 2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$$

4. If the position vector of a particle is $\vec{r} = (3\hat{i} + 4\hat{j})$ metre and its angular velocity is $\vec{\omega} = (\hat{j} + 2\hat{k})$ rad/sec then What is its linear velocity ?

Ans- $\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r} = (3\hat{i} + 4\hat{j} + 0\hat{k})\times(0\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8\hat{i} - 6\hat{j} + 3\hat{k}$$

यदि किसी कण का स्थिति सदिश $\vec{r} = (3\hat{i} + 4\hat{j})$ मीटर है तथा इसका कोणीय वेग $\vec{\omega} = (\hat{j} + 2\hat{k})$ रेडियन /सेकंड तो इसका रैखिक वेग क्या होगा ?

उत्तर:- $\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r} = (3\hat{i} + 4\hat{j} + 0\hat{k})\times(0\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8\hat{i} - 6\hat{j} + 3\hat{k}$$

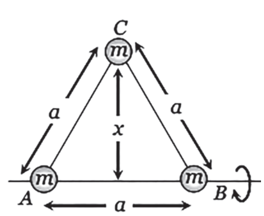
5. Three point masses each of mass m are placed at the corners of an equilateral triangle of side a. What is the moment of inertia of this system about an axis passing along one side of the triangle ?

Ans- The moment of inertia of system about side AB of triangle-

$$I = I_A + I_B + I_C$$

$$= 0 + 0 + mx^2$$

$$= m\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}ma^2$$



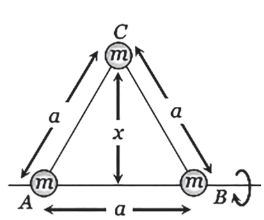
तीन बिंदु द्रव्यमान जिनमें से प्रत्येक का द्रव्यमान m है, भुजा a वाले एक समबाहु त्रिभुज के कोनों पर रखे गए हैं। त्रिभुज के एक भुजा से गुजरने वाली धुरी के परितः इस निकाय की जड़त्व आघूर्ण क्या होगा ?

उत्तर: त्रिभुज की भुजा AB के परित: निकाय का जडत्व आघूर्ण-

$$I = I_A + I_B + I_C$$

$$= 0 + 0 + mx^2$$

$$= m\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}ma^2$$



6. A force of (2i - 4 j+2k) N acts at a point (3i+2j-4k) metre from the origin. What is the magnitude of torque ?

Ans: Given-

$$\vec{F} = (2\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k})N \text{ and } \vec{r} = (3i + 2 - 4\hat{k}) \text{ meter}$$

$$\text{Torque } \vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{\tau} = -12\hat{i} - 14\hat{j} - 16\hat{k}$$

$$\Rightarrow |\vec{\tau}| = \sqrt{(-12)^2 + (-14)^2 + (-16)^2}$$

$$= \sqrt{596} = 24.4 \text{ Nm}$$

(2i - 4 j+2k) N का एक बल मूल बिंदु से (3i+2j-4k) मीटर दूर एक बिंदु पर कार्य करता है तो बलाघूर्ण का परिमाण क्या होगा ?

उत्तर: दिया गया है-

$$\vec{F} = (2\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k})N \text{ और } \vec{r} = (3i + 2 - 4\hat{k}) \text{ meter}$$

बलाघूर्ण - $\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \end{vmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{\tau} = -12\hat{i} - 14\hat{j} - 16\hat{k}$$

$$\Rightarrow |\vec{\tau}| = \sqrt{(-12)^2 + (-14)^2 + (-16)^2}$$

$$= \sqrt{596} = 24.4 \text{ Nm}$$

7. A ring of radius 0.5 m and mass 10 kg is rotating about its diameter with an angular velocity of 20 rad/s. What is its kinetic energy ?

Ans- Rotational kinetic energy=

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\times 10\times(0.5)^2\right)(20)^2 = 250\ J$$

0.5 मीटर त्रिज्या और 10 किलोग्राम द्रव्यमान की एक अंगूठी अपने व्यास के चारों ओर 20 रेडियन/सेकंड के कोणीय वेग से घूम रही है तो इसकी गतिज ऊर्जा क्या होगी ?

उत्तर:- घूर्णन गतिज उर्जा=

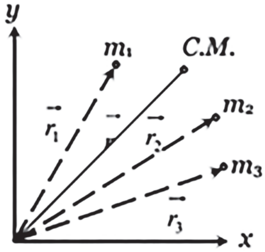
$$\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\times 10\times(0.5)^2\right)(20)^2 = 250\ J$$

LONG ANSWER TYPE QUESTIONS:
दीर्घ उत्तरीय प्रश्न:

1. Define centre of mass for discrete and continuous distribution of mass .Find the centre of mass of a uniform straight rod of mass M and length L.

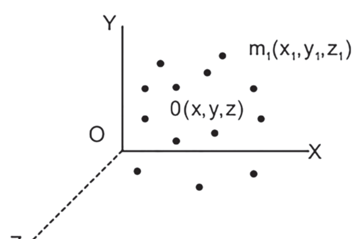
Ans- Centre of mass of a body is a point where the entire mass of the body can be supposed to be concentrated.It is a point that moves as though all the mass were concentrated there and all external forces were applied there.

If a system consists of n particles of masses $m_1, m_2, m_3 ....m_n$ whose positions vectors are $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, ...\vec{r}_n$ respectively then position vector of centre of mass is given by



$$\vec{r} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3 + ...m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + m_3 + ...m_n}$$

In terms of cartesian coordinate system : If there are n particles having mass m_1, $m_2 ....m_n$ and are placed at (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) ....(x_n, y_n, z_n) then the centre of mass of system is defined as (X, Y, Z)



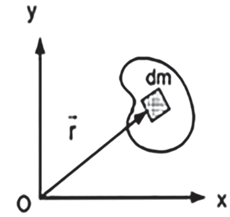
Where

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 ..... + m_n x_n}{m_1 + m_2 + m_3 ...... + m_n} = \Sigma_1^n \frac{m_i x_i}{m_i}$$

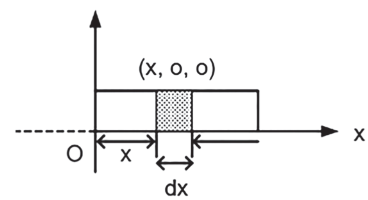
$$Y = \sum_1^n \frac{m_i y_i}{m_i} \quad and \quad Z = \sum_1^n \frac{m_i z_i}{m_i}$$

If we consider the body to have continuous distribution of matter, the summation in the formula of centre of mass should be replaced by integration. If x, y, z are the coordinates of small mass dm, we write the coordinates of the centre of mass as

$$X = \frac{1}{M}\int x\,dm, Y = \frac{1}{M}\int y\,dm, Z = \frac{1}{M}\int z\,dm$$



Centre of mass of a uniform straight rod of mass M and length L:- Let M and L be the mass and the length of the rod respectively. Take the left end of the rod as the origin and the X-axis along the rod. Consider an element at a distance x from the centre O and its width be dx.



As the rod is uniform, the mass per unit length is M/L and hence the mass of the element is dm = (M/L) dx.

The x-coordinate of the centre of mass of the rod is

$$X = \frac{1}{M}\int x\,dm = \frac{1}{M}\int_0^L x\left(\frac{M}{L}dx\right) = \frac{1}{L}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L = \frac{L}{2}$$

The y-coordinate is,

$$Y = \frac{1}{M}\int y\,dm = 0$$

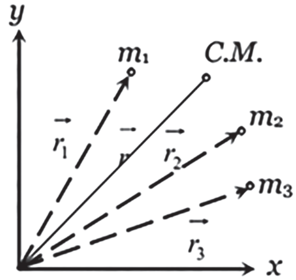
and similarly Z = 0.

The centre of mass is at (L/2,0,0), i.e. at the middle point of the rod.

द्रव्यमान के पृथक एवं सतत् वितरण के लिए द्रव्यमान के केन्द्र को परिभाषित करें। द्रव्यमान M और लंबाई L की एक समान सीधी छड़ के द्रव्यमान का केंद्र ज्ञात कीजिए।

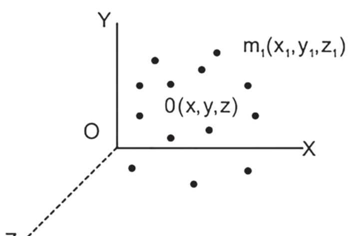
उत्तर- **द्रव्यमान केंद्र**:- किसी पिंड का द्रव्यमान केंद्र वह बिंदु है जहां पिंड का संपूर्ण द्रव्यमान केंद्रित माना जा सकता है| यह एक बिंदु है जो इस प्रकार गति करता है मानो सम्पूर्ण द्रव्यमान वहीं केंद्रित हो गया हो और सभी बाहरी बल वहीं लागू हो गई हों।

यदि एक निकाय में $m_1, m_2, m_3 ....m_n$ द्रव्यमान के n कण हैं जिनके स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3 .... \vec{r}_n$ हो तो द्रव्यमान केंद्र की स्थिति सदिश को इस प्रकार ब्यक्त करेंगें -



$$\vec{r} = \frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2} + m_3\vec{r_3} + ...m_n\vec{r_n}}{m_1 + m_2 + m_3 + ...m_n}$$

कार्तीय निर्देशांक प्रणाली के संदर्भ में:- यदि n कण हैं जिनका द्रव्यमान m_1, m_2 ....m_n है और उन्हें (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) ....(x_n, y_n, z_n) पर रखा गया हो तब निकाय के द्रव्यमान केंद्र को (X, Y, Z) से ब्यक्त करेंगें ।



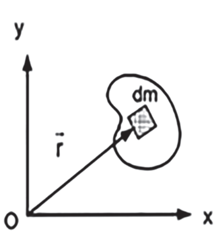
जहाँ

$$X = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3..... + m_nx_n}{m_1 + m_2 + m_3...... + m_n} = \Sigma_1^n \frac{m_ix_i}{m_i}$$

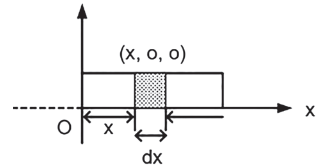
$$Y = \Sigma_1^n \frac{m_iy_i}{m_i} \quad \text{और} \quad Z = \Sigma_1^n \frac{m_iz_i}{m_i}$$

यदि हम पिंड में पदार्थ का निरंतर वितरण होता है, तो द्रव्यमान के केंद्र के सूत्र में योग को समाकलन द्वारा प्रतिस्थापित किया जाना चाहिए। यदि x, y, z छोटे द्रव्यमान dm के निर्देशांक हैं, तो हम द्रव्यमान केंद्र के निर्देशांक को इस प्रकार लिखते हैं-

$$X = \frac{1}{M}\int x\,dm, Y = \frac{1}{M}\int y\,dm, Z = \frac{1}{M}\int z\,dm$$



द्रव्यमान M और लंबाई L की एक समान सीधी छड़ के द्रव्यमान का केंद्र:-मान लीजिए M और L क्रमशः छड़ का द्रव्यमान और लंबाई है। छड़ के बाएँ सिरे को मूल बिंदु के रूप में लें और X-अक्ष को छड़ के अनुदिश लें। केंद्र O से x दूरी पर चौड़ाई dx का एक तत्व पर विचार करें ।



चूँकि छड़ एक समान है और प्रति इकाई लंबाई का द्रव्यमान M/L है ,इसलिए तत्व का द्रव्यमान

dm = (M/L) dx होगा |

छड़ के द्रव्यमान केन्द्र का X-निर्देशांक -

$$X = \frac{1}{M}\int x\,dm = \frac{1}{M}\int_0^L x\left(\frac{M}{L}dx\right) = \frac{1}{L}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L = \frac{L}{2}$$

Y-निर्देशांक -

$$Y = Y = \frac{1}{M}\int y\,dm = 0$$

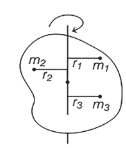
और इसी प्रकार Z-निर्देशांक - Z = 0 होगा |

अतः छड़ का द्रव्यमान केंद्र (L/2,0,0) अर्थात छड़ के मध्य बिंदु पर होगा |

2. Define Moment of inertia for discrete and continuous distribution of mass.Find the Moment of inertia of a uniform rod of mass M and length L about an axis passing through one end and perpendicular to its length.

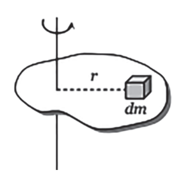
Ans- Moment of inertia is the property of an object by virtue of which it opposes any change in its state of rest or of uniform rotation about an axis. It plays the same role in rotational motion as mass plays in linear motion.

The moment of inertia of a body about a given axis is equal to the sum of the products of the masses of its constituent particles and the square of their respective distances from the axis of rotation.



Mathematically: $I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + \ldots + m_nr_n^2 = \sum_{i=1}^{i=n} m_i r_i^2$

Moment of inertia of a continuous distribution of mass-



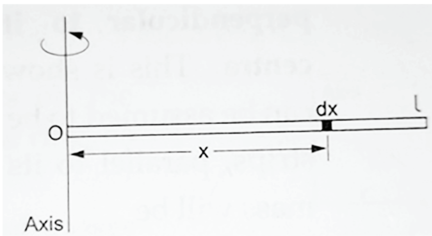
Moment of inertia of a mass dm located at a perpendicular distance r from the axis of rotation is -

$dI = dmr^2$

⇒Moment of inertia of the entire body

$$I = \int r^2 dm$$

Moment of Inertia of a Thin Rod:- Consider a thin uniform rod of mass M and length L. The mass per unit length of the rod is M/L.



The entire rod may be assumed to be made up of a large number of small elements. Consider one such differential element of thickness dx at a distance x from the axis of rotation ,as shown in figure. Its mass is-

dm=M/L dx ....(i)

The moment of inertia of this element about the axis of rotation is-

$$dI = dm \cdot x^2 = \left(\frac{M}{l}\right)x^2 dx, \qquad ....(ii)$$

The moment of inertia I of the whole rod about the given axis of rotation can be found by integrating the above equation from limits x=0 to x=L. Therefore

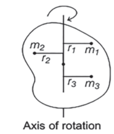
$$I = \int_0^l \left(\frac{M}{l}\right) x^2 dx = \frac{M}{l}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^l = \frac{M}{l}\cdot\frac{l^3}{3}$$

$$I = \frac{Ml^2}{3}.$$

द्रव्यमान के असतत और निरंतर वितरण के लिए जड़त्व आघूर्ण को परिभाषित करें। द्रव्यमान M और लंबाई L की एक समान छड़ की उस अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण निकले जो इसके इसके एक सिरे से गुजरे और इसकी लंबाई के लंबवत हो |

उत्तर: जड़त्व आघूर्ण किसी वस्तु का वह गुण है जिसके आधार पर वह किसी अक्ष के चारों ओर विराम की स्थिति या एकसमान घूर्णन की स्थिति में किसी भी परिवर्तन का विरोध करता है। यह घूर्णन गति में वही भूमिका निभाता है जो द्रव्यमान रैखिक गति में निभाता है।

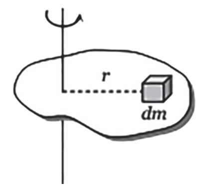
किसी दिए गए अक्ष के परितः किसी पिंड का जड़त्व आघूर्ण उसके घटक कणों के द्रव्यमान और घूर्णन अक्ष से उनकी संबंधित दूरी के वर्ग के गुणनफल बराबर होता है।



गणितीय रूप से ,

$$I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + \ldots + m_nr_n^2 = \sum_{i=1}^{i=n} m_i r_i^2$$

द्रव्यमान के निरंतर वितरण की स्थिति में -

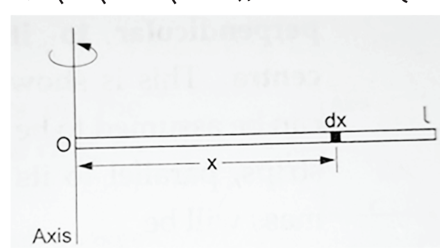


घूर्णन अक्ष से लम्बवत r दुरी पर स्थित द्रव्यमान dm का जड़त्व आघूर्ण $dI = dmr^2$

⇒ सम्पूर्ण पिंड का जड़त्व आघूर्ण

$$I = \int r^2 dm$$

एक पतली छड़ का जड़त्व आघूर्ण:- द्रव्यमान M और लंबाई L की एक पतली समान छड़ पर विचार करें। छड़ की प्रति इकाई लंबाई का द्रव्यमान M/L होगा।



यह माना जा सकता है कि पूरी छड़ बड़ी संख्या में छोटे तत्वों से बनी है। घूर्णन अक्ष से दूरी x पर मोटाई dx के ऐसे एक छोटे तत्व पर विचार करें, जैसा कि चित्र में दिखाया गया है। इसका द्रव्यमान होगा -

dm=M/L dx ....(i)

घूर्णन अक्ष के परितः इस तत्व का जड़त्व आघूर्ण होगा-

$$dI = dm \cdot x^2 = \left(\frac{M}{l}\right)x^2 dx, \qquad ....(ii)$$

घूर्णन के दिए गए अक्ष के परितः पूरी छड़ का जड़त्व आघूर्ण I को उपरोक्त समीकरण को x=0 से x=L तक समाकलित करके पाया जा सकता है। इसलिए

$$I = \int_0^l \left(\frac{M}{l}\right) x^2 dx = \frac{M}{l}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^l = \frac{M}{l}\cdot\frac{l^3}{3}$$

$$I = \frac{Ml^2}{3}.$$

3. Define the radius of gyration. On what factors it depends. Show that the radius of gyration of a body about an axis is equal

to the root mean square distance of the constituent particles from the given axis.

Ans: Radius of gyration (K):- It is defined as the distance of a point from the axis of rotation at which, if the whole mass of the body were concentrated, the moment of inertia of the body would be the same as with the actual distribution of mass of the body.

i.e. Moment of inertia of a body about a given axis is equal to the product of mass of the body and squares of its radius of gyration about that axis i.e.

$$I = Mk^2 \text{ or } k = \sqrt{\frac{I}{M}}.$$

where k is called the radius of gyration.

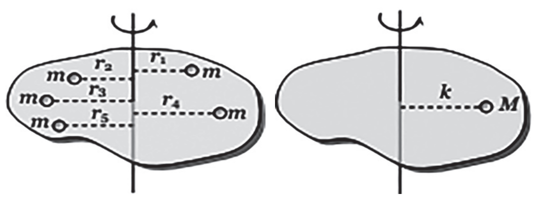
The Radius of gyration of a body depends upon

(a) position of the axis of rotation.

(b) orientation of the axis of rotation.

(c) shape and size of the body.

(d) distribution of mass of the body about the axis of rotation.



Suppose a rigid body consists of n particles of each of the mass m. Let r_1, r_2, ... r_n be the perpendicular distances of these particles from the axis of rotation. Then

$$I = mr_1^2 + mr_2^2 + mr_3^2 + ... + mr_n^2$$

Hence, $m_1 = m_2 = m_3 = ... = m$

so, $I = m(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + ... r_n^2)$ ....(i)

If whole mass of the body is regarded to be concentrated at a perpendicular distance K (radius of gyration), then

$I = MK^2$ ....(ii) Where, M=nm

By equating (i) and (ii) we get,

$Mk^2 = m(r^2_1 + r^2_2 + r^2_3 + ...r^2_n)$ [$\because$ M = nm]

$\Rightarrow nmk^2 = m(r^2_1 + r^2_2 + r^2_3 + ...r^2_n)$

$$\Rightarrow k = \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^3 + ... + r_n^2}{n}}$$

Hence the radius of gyration of a body about a given axis is equal to the root mean square distance of the constituent particles of the body from the given axis.

परिभ्रमण त्रिज्या को परिभाषित करें। यह किन कारकों पर निर्भर करता है| दिखाएँ कि किसी अक्ष के चारों ओर किसी पिंड के घूमने की परिभ्रमण त्रिज्या दिए गए अक्ष से घटक कणों की मूल माध्य वर्ग दूरी के बराबर होती है।

उत्तर: **परिभ्रमण त्रिज्या (K):-**

इसे घूर्णन अक्ष से उस बिंदु की दूरी के रूप में परिभाषित किया जाता है जिस पर पिंड का पूरा द्रव्यमान केंद्रित हो तो उसके जड़त्व आघूर्ण का वही मान प्राप्त होगा जो पिंड के द्रव्यमान के वास्तविक वितरण के कारण है ।

अर्थात ,किसी दिए गए अक्ष के परितः किसी पिंड का जड़त्व आघूर्ण पिंड के द्रव्यमान और परिभ्रमण त्रिज्या के वर्गों के गुणनफल के बराबर होता है।

$$I = Mk^2 \text{ or } k = \sqrt{\frac{I}{M}}.$$

जहाँ k को परिभ्रमण त्रिज्या कहा जाता है।

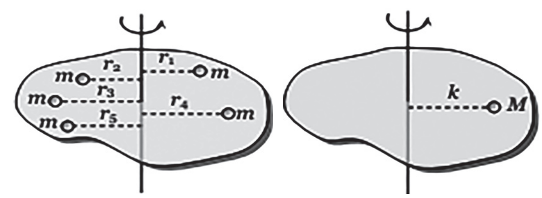
किसी पिंड का परिभ्रमण त्रिज्या निर्भर करता है-

(a) घूर्णन अक्ष की स्थिति (दुरी)

(b) घूर्णन अक्ष का अभिविन्यास (दिशा)

(c) पिंड का आकृति और परिमाप

(d) घूर्णन अक्ष के परितः पिंड के द्रव्यमान का वितरण



मान लीजिए कि एक पिंड में प्रत्येक m द्रव्यमान के n कण होते हैं। मान लीजिए कि r_1, r_2, ... r_n घूर्णन अक्ष से इन कणों की लंबवत दूरी हैं। तब-

$$I = mr_1^2 + mr_2^2 + mr_3^2 + ... + mr_n^2$$

$m_1 = m_2 = m_3 = ... = m$ इसलिय यहाँ,

$I = m(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + ... r_n^2)$ ....(i)

यदि पिंड का पूरा द्रव्यमान एक लंबवत दूरी K (परिभ्रमण त्रिज्या) पर केंद्रित माना जाता है, तो

$I = MK^2$ ....(ii) जहाँ, M=nm

समीकरण (i) और (ii) को बराबर करने पर हम पाते है कि-

$Mk^2 = m(r^2_1 + r^2_2 + r^2_3 + ...r^2_n)$ [$\because$ M = nm]

$\Rightarrow nmk^2 = m(r^2_1 + r^2_2 + r^2_3 + ...r^2_n)$

$$\Rightarrow k = \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^3 + ... + r_n^2}{n}}$$

इसलिए किसी दिए गए अक्ष के परित: किसी पिंड के घूमने की त्रिज्या दिए गए अक्ष से शरीर के घटक कणों की वर्ग मूल माध्य वर्ग दूरी के बराबर होती है।